

ПРЕДАВАЊЕ 1

(Летен семестар 20/21: 23.02.2021)

Графови и Множества на Соодветно Ниво

Досега сте разгледувале функции за кои „влезот“ е реален број t , а „излезот“ е скалар $\alpha(t) = x_1(t)$ или вектор $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, за $n \geq 2$. Ова се добро познатите криви во простор, за чија анализа доволни се алатките од диференцијално сметање 1 (реална функција од една променлива). Во овој курс ќе ги сменеме улогите, влезот ќе биде вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ а излезот ќе биде реален број $y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ или вектор $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Координатите $x_1, x_2, \dots, x_n$ ќе бидат независни променливи, а y односно $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ зависни променливи. На овој начин добиваме реални скаларни функции од n -променливи, односно реални векторски функции од n -променливи.

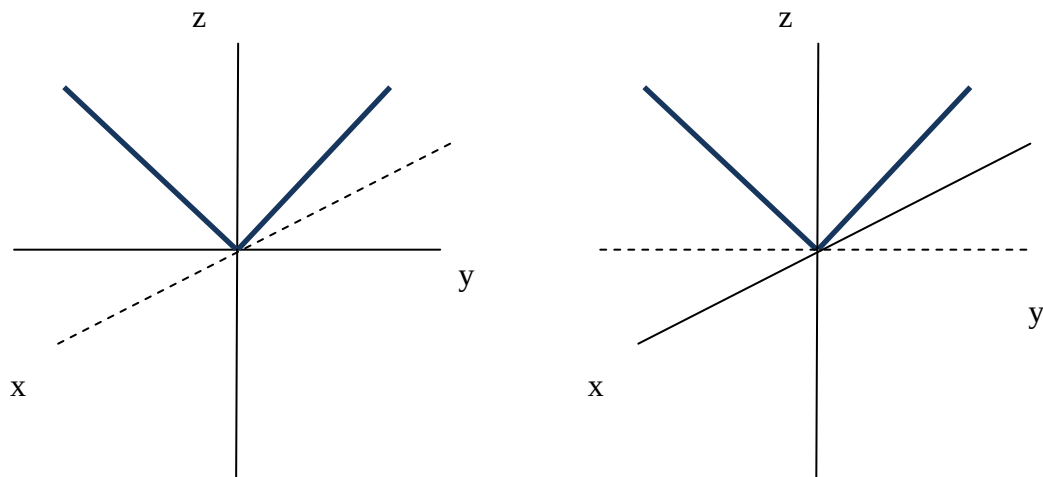
Дефиниција. Нека $A \subseteq \mathbb{R}^n$ и нека $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ е реална функција. *Граф* за функцијата f е множеството:

$$G_f = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A \text{ и } x_{n+1} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

Забележи дека графот е подмножество од $\mathbb{R}^{n+1}$, па графички приказ може да очекуваме за $n=1$ или $n=2$. Ова значи дека функцијата треба да биде од една или две променливи. Во случајот на функција од две променливи, што и ќе биде нашиот фокус, доменот $A \subseteq \mathbb{R}^2$ е подмножество од рамнината $\mathbb{R}^2$, додека графот е површина во $\mathbb{R}^3$ што ја задоволува равенката $z = f(x, y)$ и чија проекција на xy -рамнината е множеството A .

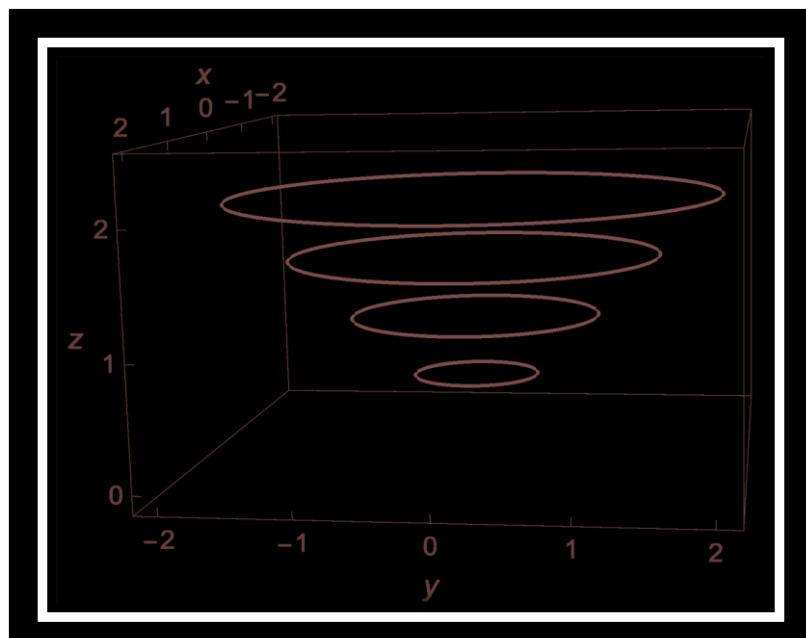
Пример. Нека $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ е определена со $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. За да го скицираме графот $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ќе разгледаме пресеци со погодни избрани рамнини, а потоа ќе направиме реконструкција на слика од површината со помош на овие пресеци.

На пример ќе ги разгледаме пресеците со трите координатни рамнини. За yz -рамнината имаме дека $x=0$, па равенката на пресекот на графот со оваа рамнина е $z = \sqrt{0^2 + y^2} = |y|$, што е искршена линија во облик на буквата V. Слично, и за пресекот со xz -рамнината добиваме $z = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x|$, што е повторно искршена линија во облик на буквата V.



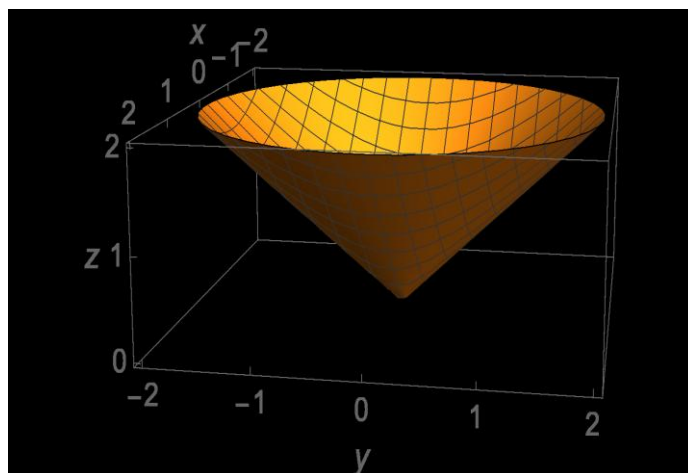
Слика 1

Начелно, пресеците со хоризонталните рамнини $z=c$ се исто многу полезни. Во нашиот случај ги опишуваме со равенката $c = \sqrt{x^2 + y^2}$ или $x^2 + y^2 = c^2$, каде $c \geq 0$.



Слика 2

Забележи дека ова се кружници со радиус c во рамнините $z=c$. Како што се зголемува c кружниците стануваат се поголеми и поголеми (види слика 2). Сега добиените информации ги лепиме во една целина и добиваме убава слика за графот на функцијата $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Слика 3

Станува збор за кружен конус со теме во координатниот почеток како што е прикажано на слика 3.

Дефиниција. Нека $A \subseteq \mathbb{R}^n$ и нека $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ е реална функција. За даден реален број $c \in \mathbb{R}$, *множество на соодветно ниво c* е множеството $\{x \in A \mid f(x) = c\}$. Тоа се сите точки од доменот во кои функцијата f ја достигнува вредноста c . За функции од две променливи, *множества на соодветно ниво* ги нарекуваме и *криви на соодветно ниво*, додека за функции од три променливи, *површини на соодветно ниво*.

Забелешка. Забележи дека множествата на соодветно ниво c се подмножества од доменот A , што се содржи пак во $\mathbb{R}^n$. Ова значи дека може да ги скицираме овие множества во случајот кога работиме со функции од една, две или три променливи.

Пример. Нека $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ е определена со $f(x, y) = x^2 - y^2$. Скицирај неколку множества на соодветно ниво c и скицирај го графикот на функцијата f .

Ја разгледуваме равенката $f(x, y) = x^2 - y^2 = c$, за неколку вредности на c , на пример за $c \in \{-1, 0, 1\}$. Забележи дека за $c=1$ множеството на соодветно ниво 1, односно кривата на соодветно ниво 1 е хиперболата $x^2 - y^2 = 1$. Слично, за $c=0$ множеството на соодветно ниво 0, односно кривата на соодветно ниво 0 се двете прави $y = \pm x$.

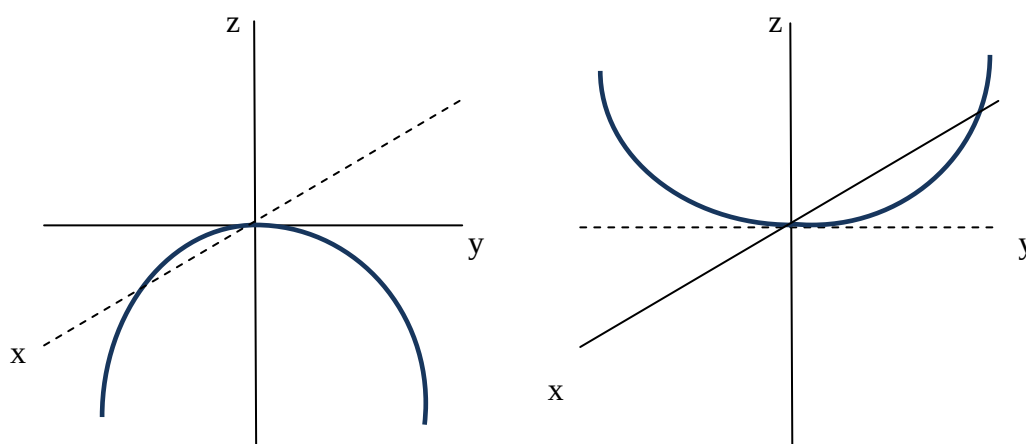
Аналогно, за $c = -1$ множеството на соодветно ниво -1 , односно кривата на соодветно ниво -1 е хиперболата $y^2 - x^2 = 1$.

Скицата на овие множества ви ја оставам како лесна вежба.

Околу графот на функцијата f : Првата информација ја добиваме доколку кривите на соодветно ниво c од xy -рамнината ги кренеме на висина $z = c$. Понатаму слично на претходниот пример одиме со пресеците со координатните рамнини:

Со yz -рамнината: $x = 0$, па добиваме: $z = -y^2$, парабола свртена надолу;

Со xz -рамнината: $y = 0$, па добиваме: $z = x^2$, парабола свртена нагоре;

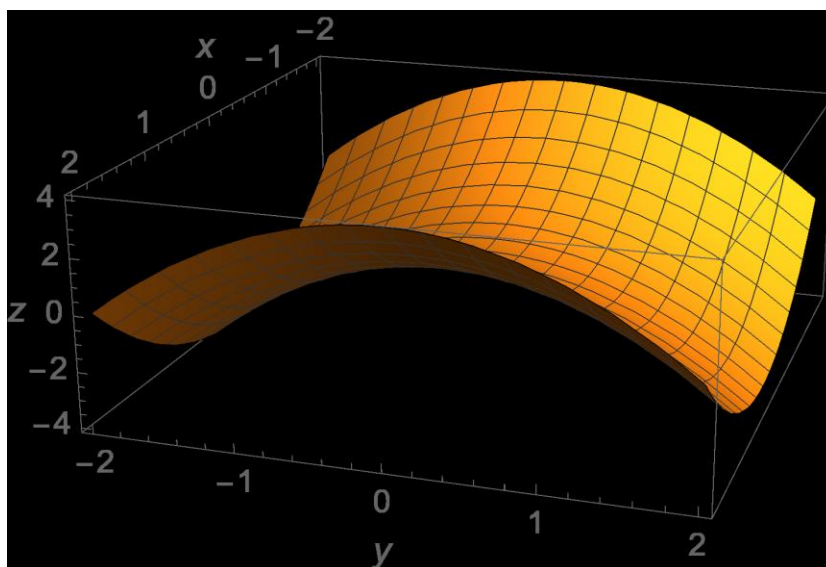


Слика 4

Реконструкцијата на графот од овие „делови“ ни дава површина што наликува на седло, уште позната како хиперболичен параболоид (види слика 5 подолу).

Забележи дека оваа површина има интересна одлика што при пресек со yz -рамнината координатниот почеток наликува на локален максимум, додека во пресек со xz -рамнината координатниот почеток наликува на локален минимум.

Забелешка. Подоцна во курсот откако ќе се воведат диференцијалното сметање на реални функции од повеќе променливи, ќе воведеме и класификација на таканаречени седлести точки, каква што е точката $O(0,0,0)$ - координатниот почеток во посочениот пример.

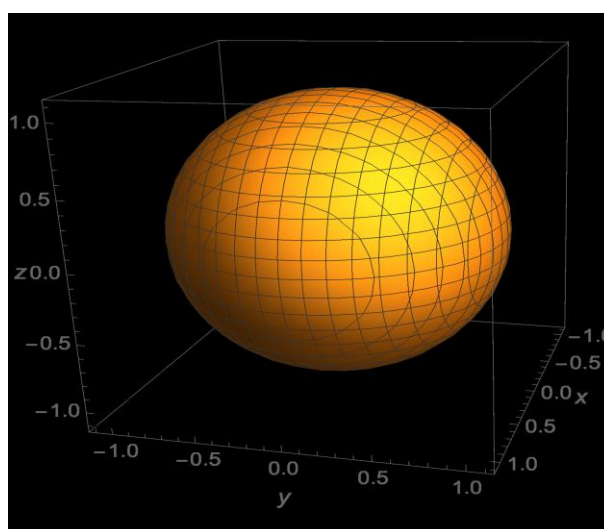


Слика 5

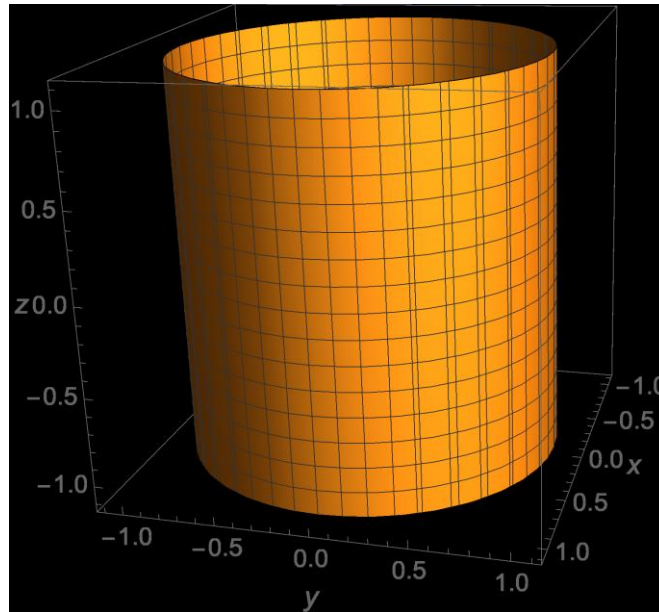
Уште Неколку Површини во $\mathbb{R}^3$

Прво да забележиме дека не сите површини во $\mathbb{R}^3$ се графови на некоја функција $z = f(x, y)$. Ќе разгледаме уште неколку примери на површини во $\mathbb{R}^3$ и равенки што ги дефинираат.

Пример1. Точка $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ лежи на сфера S_0^a со радиус a и центар во $(0, 0, 0)$ акко $\|(x, y, z)\| = a$. Ова значи дека равенката на сфера S_0^a е: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.



Слика 6. Сфера со радиус 1



Слика 7. Кружен цилиндер со радиус 1

Забележи дека равенката на кружен цилиндер со радиус a е определена со равенката:

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (*)$$

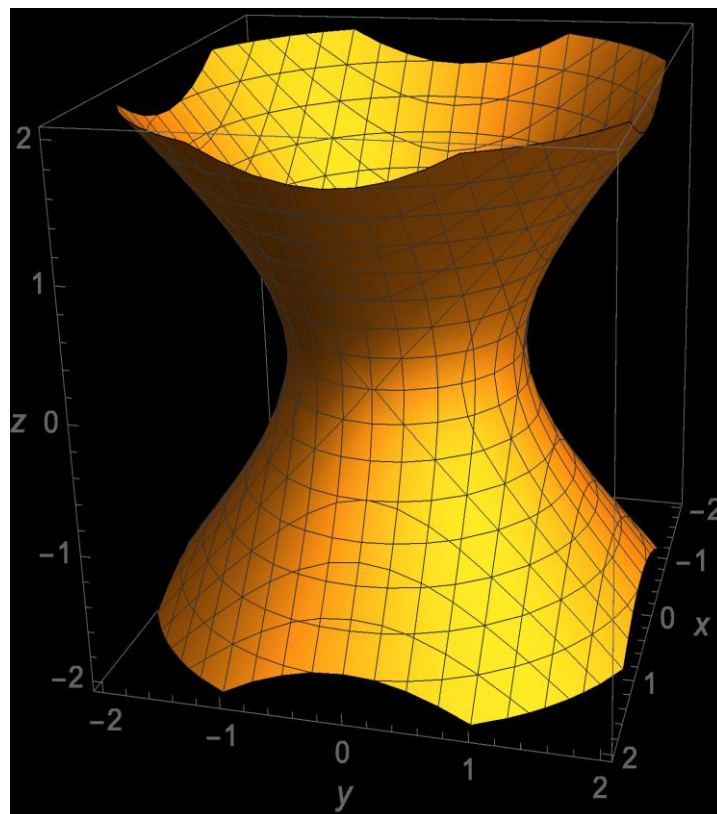
Имено, доколку равенката ја гледаме како равенка во xy -рамнината тогаш $(*)$ е равенка на кружница. Но, доколку ја гледаме како равенка во простор тогаш z е слободна променлива, па $(*)$ е равенка на кружен цилиндер.

Забелешка. Забележи дека последниве две површини се множества на соодветно ниво за функција од три променливи. На пример сферата е множество од ниво $c = a^2$ за функцијата $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, додека цилиндерот е множество од ниво $c = a^2$ за функцијата $f(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Вежба. Скицирај ја површината $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Површината наликува на кула за разладување во нуклеарна централа. Затоа и се нарекува **разладувачка кула**. Види слика 8 подолу.

Обидете се да ја скицирате со рамнински пресеци со координатните рамнини и хоризонталните рамнини $z = c$. Очекувајте скица што треба да наликува на слика 8.

Забелешка. Забележи дека и кулата за разладување е множество од ниво $c = 1$ за функцијата $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.



Слика 8. Разладувачка Кула

Забелешка 2. Ваквиот начин на размислување ни дава можност за визуелизација на однесувањето на функции од три променливи, за кои ни треба 4-димензии за графичко прикажување. Имено, ги разгледуваме множествата од соодветно ниво c определени со равенката $f(x, y, z) = c$, а потоа треба да го испитаме начинот на кој овие множества „морфираат“ едни во други при менување на параметарот c . Ова ни овозможува да добиеме информација кои точки во која вредност се пресликуваат. На пример функцијата $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ е константна на множествата од соодветно ниво c , што во случајов се сфери. Колку е поголема сферата толку е поголема вредноста што ја прима функцијата $f(x, y, z)$.