

ПРЕДАВАЊЕ 2

(Летен семестар 20/21: 24.02.2021)

„Отворени Множества и Концепт за Непрекинатост“

Ќе започнеме со подготовки за воведување на важниот концепт за непрекинатост. Интуитивно непрекинатата функција подразбира „блиски“ точки да одат во „блиски“ точки, но „блискоста“ е поим што треба да се дефинира. Во метрички простори метриката ни укажува на тоа кои точки се блиски, а кои не. Овој пристап може да се обопшти со воведување на т.н. околини систем од отворени множества. Ова се идеи со кои се тропа пред портите на уште една математичка дисциплина- **Топологија**. Во овој курс ќе се задржиме на концептот за отворени множества во Евклидски метрички простор $\mathbb{R}^n$.

Да забележиме дека поимот за непрекинатост и поимот за гранична вредност се тесно поврзани. Од повеќе перспективи граничните вредности се пофундаментални од концептот за непрекинатост, па посебно внимание ќе посветиме и на нив. Дискусијата ќе ја започнеме со воведување на „**најприродните**“ подмножества од $\mathbb{R}^n$ за спроведување на гранични процедури. Ова се множества за кои постои „перниче“ околу секоја точка така што може да се пристапи од произволен правец кон разгледуваната точка.

Дефиниција. Нека $a \in \mathbb{R}^n$ е произволна точка и нека $r > 0$. **Отворена топка** со центар во точката a и радиус r е множеството:

$$T(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$$

Поинаку кажано, тоа е множество од сите точки што се на растојание помало од r во однос на a .

Дефиниција. За дадено подмножество $U \subseteq \mathbb{R}^n$ велиме дека е **отворено** ако за секоја точка $a \in U$ постои $r > 0$ така што $T(a, r) \subseteq U$.

Пример. Отворениот интервал $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ е отворено множество.

Пример. Нека U и V се отворени подмножества од $\mathbb{R}^n$. Ќе докажеме дека и пресекот $U \cap V \subseteq \mathbb{R}^n$ е отворено множество. Одбираме произволна точка $a \in U \cap V$. Тогаш $a \in U$, па од отвореноста на U постои $r_1 > 0$ така што $T(a, r_1) \subseteq U$. Слично, $a \in V$, па

постои $r_2 > 0$ така што $T(a, r_2) \subseteq V$. Нека $r = \min\{r_1, r_2\}$. Тогаш $T(a, r) \subseteq T(a, r_1) \subseteq U$ и $T(a, r) \subseteq T(a, r_2) \subseteq V$. Следува дека $T(a, r) \subseteq U \cap V$. Доказот е комплетиран.

Забелешка1. Со математичка индукција, лесно може да докажеме дека слично тврдење важи и за конечен пресек $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$ од отворени подмножества U_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ од $\mathbb{R}^n$.

Забелешка2. Слично тврдење не мора да важи во случај на бесконечен пресек. Имено, во $\mathbb{R}^2$ на пример, нека ја разгледаме низата од концентрични отворени топки $U_1 = T((0, 0), 1)$, $U_2 = T((0, 0), \frac{1}{2})$, $U_3 = T((0, 0), \frac{1}{3})$ итн. Забележи дека секое U_n е отворено множество, но нивниот пресек $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n \cap \dots = \{(0, 0)\}$ веќе не е.

Дефиниција. За едно подмножество $K \subseteq \mathbb{R}^n$ велиме дека е затворено ако множеството $\mathbb{R}^n \setminus K$ е отворено.

Пример. Затворениот интервал $[a, b]$ е затворено множество.

Дефиниција. Нека $B \subseteq \mathbb{R}^n$. За точка $P \in \mathbb{R}^n$ велиме дека е точка на акумулација за множеството B ако за секој $\varepsilon > 0$ пресекот $(T(P, \varepsilon) \setminus \{P\}) \cap B$ е непразен, т.е.:

$$(T(P, \varepsilon) \setminus \{P\}) \cap B \neq \emptyset$$

Пример. Точката $0 \in \mathbb{R}$ е точка на акумулација за множеството $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \mathbb{R}$.

Лема. Едно множество $B \subseteq \mathbb{R}^n$ е затворено акко B ги содржи сите свои точки на акумулација.

Подготвени сме да ја воведеме дефиницијата за гранична вредност на функција од повеќе променливи:

Дефиниција: Нека $A \subseteq \mathbb{R}^n$ и нека $P \in \mathbb{R}^n$ е точка на акумулација за множеството A . Понатаму, нека е дадена функција $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$. За векторот L велиме дека е гранична вредност за функцијата f кога Q се стреми кон P и пишуваме:

$$\lim_{Q \rightarrow P} f(Q) = L,$$

ако за секој $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$ така што од :

$$Q \in (T(P, \delta) \setminus \{P\}) \cap A \text{ следува дека } f(Q) \in T(L, \varepsilon).$$

Забелешка. За векторот L уште велиме дека е *лимес* на функцијата f .

Пропозиција. Нека $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $g: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ се дадени функции. Понатаму, нека $\lambda \in \mathbb{R}$ е произволен скалар. Ако P е точка на акумулација за множеството A и важи:

$$\lim_{Q \rightarrow P} f(Q) = L \text{ и } \lim_{Q \rightarrow P} g(Q) = M$$

тогаш: 1) $\lim_{Q \rightarrow P} (f + g)(Q) = L + M$;

$$2) \lim_{Q \rightarrow P} (\lambda f)(Q) = \lambda L.$$

Специјално за $m=1$ функциите се скаларни, па важат и следниве тврдења:

$$3) \lim_{Q \rightarrow P} (fg)(Q) = LM \text{ и } 4) \text{ ако } M \neq 0 \text{ тогаш } \lim_{Q \rightarrow P} \left(\frac{f}{g} \right)(Q) = \frac{L}{M}.$$

Доказ: Ќе го докажеме само тврдењето 1). Останатите тврдења имаат слични докази. Одбираме произволно $\varepsilon > 0$. Од тоа што L и M се гранични вредности постојат $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ така што:

$$\text{Ако } \|Q - P\| < \delta_1 \text{ и } Q \in A \text{ тогаш } \|f(Q) - L\| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ и}$$

$$\text{Ако } \|Q - P\| < \delta_2 \text{ и } Q \in A \text{ тогаш } \|g(Q) - M\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

Нека $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Ако $\|Q - P\| < \delta$ и $Q \in A$ тогаш:

$$\begin{aligned} \|(f + g)(Q) - L - M\| &= \|(f(Q) - L) + (g(Q) - M)\| \leq \\ &\leq \|f(Q) - L\| + \|g(Q) - M\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

при што го ползувавме неравенството на триаголник во горната оценка. Заклучокот следува.

Подготвени сме да го воведеме поимот за непрекинатост на функција од повеќе променливи.

Дефиниција. Нека $A \subseteq \mathbb{R}^n$ и нека $P \in A$ е точка на акумулација за множеството A . Понатаму, нека $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ е дадена функција. За f велиме дека е *непрекината* во точката P ако $\lim_{Q \rightarrow P} f(Q) = f(P)$. За функцијата f велиме дека е непрекината ако е непрекината во секоја точка $P \in A$.

Забелешка. Забележи дека во дефиницијата точката $P \in A$ е точка на акумулација. Во спротивно за P ќе постои отворена топка $T(P, \varepsilon)$ таква што $(T(P, \varepsilon) \setminus \{P\}) \cap A = \emptyset$. Ваквите точки ги нарекуваме изолирани точки. Секоја функција сметаме дека е непрекината во изолирана точка, што формално е оправдано со:

„ако за секој $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$ така што од :

$$Q \in (T(P, \delta) \setminus \{P\}) \cap A \text{ следува дека } f(Q) \in T(f(P), \varepsilon)“.$$

но доколку точката е изолирана за доволно мало $\delta > 0$, множеството $(T(P, \delta) \setminus \{P\}) \cap A$ е празно, па импликацијата е точна.

Теорема. Ако $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ е полиномна функција тогаш f е непрекината.

Доказ. Теоремата е последица на горната пропозиција.

Забелешка. Сличен резултат важи и за дробно-рационални функции (количник од две полиноми).

Пример. Функцијата $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ определена со $f(x, y) = x^2 + y^2$ е непрекината.

Пропозиција. Нека $A \subseteq \mathbb{R}^n$ и нека $B \subseteq \mathbb{R}^m$. Понатаму, нека $f: A \rightarrow B$ и $g: B \rightarrow \mathbb{R}^l$ се дадени функции. Претпоставуваме дека P е точка на акумулација за множеството A , L е точка на акумулација за множеството B и важат релациите:

$$\lim_{Q \rightarrow P} f(Q) = L \text{ и } \lim_{M \rightarrow L} g(M) = E$$

Тогаш важи следниов лимес: $\lim_{Q \rightarrow P} (g \circ f)(Q) = E$.

Доказ: Одбираме произволно $\varepsilon > 0$. Постои $\delta > 0$ така што:

$$\text{Ако } \|M - L\| < \delta \text{ и } M \in B \text{ тогаш } \|g(M) - E\| < \varepsilon$$

Од друга страна за $\delta > 0$ постои $\tau > 0$ така што:

$$\text{Ако } \|Q - P\| < \tau \text{ и } Q \in A \text{ тогаш } \|f(Q) - L\| < \delta$$

Но тогаш ако $\|Q - P\| < \tau$ и $Q \in A$, имаме дека $M = f(Q) \in B$ и $\|M - L\| < \delta$, па следува дека: $\|(g \circ f)(Q) - E\| = \|g(f(Q)) - E\| = \|g(M) - E\| < \varepsilon$. Доказот е комплетиран.

Пример. Дали постои следниов лимес $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$?

Ќе докажеме дека горниот лимес не постои. Претпоставуваме дека лимесот постои. Одиме прво со рестрикција на x -оската. Ја разгледуваме функцијата $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ определена со $f(t) = (t, 0)$. Забележи дека f е непрекината, па доколку направиме композиција според претходната пропозиција треба да добиеме функција со лимес:

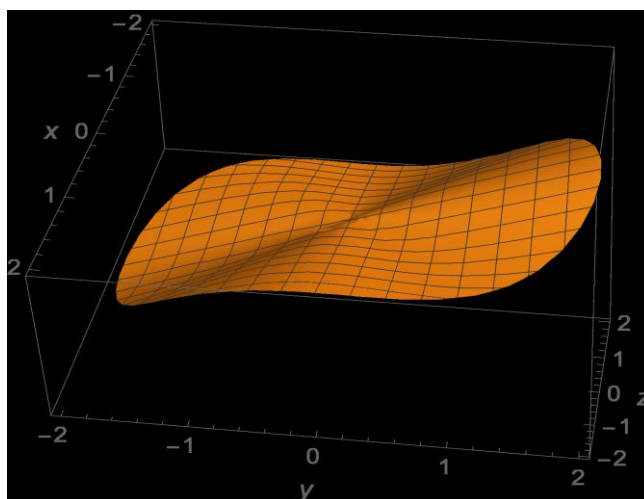
$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t^2 + 0} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$$

Сега ќе ја разгледаме рестрикцијата на правата $y = x$. Одиме со функцијата $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ определена со $f(t) = (t, t)$. Повторно од непрекинатоста на f доколку направиме композиција според претходната пропозиција треба да добиеме функција со лимес:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2 + t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Добиените различни вредности укажуваат на фактот дека разгледуваниот лимес не може да постои.

Пример. Нека е дадена функцијата $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$, за сите $(x, y) \neq (0, 0)$. Графот на функцијата е прикажан на слика 1. Дали може функцијата да се продолжи по непрекинатост во точката $(0, 0)$?



Слика 1

Прво да нагласиме дека продолжувањето по непрекинатост подразбира додефинирање на функцијата во точката $(0, 0)$ така што новодобиената функција е непрекината на целата рамнина $\mathbb{R}^2$. Ова значи дека треба да постои лимесот $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$. Ќе направиме тестирање во неколку правци. Вдолж правецот на x -оската добиваме:

$f(x, 0) = \frac{x^3 + 0^3}{x^2 + 0^2} = x \rightarrow 0$, кога $x \rightarrow 0$. Вдолж правецот на y -оската, слично добиваме:

$f(0, y) = \frac{0^3 + y^3}{0^2 + y^2} = y \rightarrow 0$, кога $y \rightarrow 0$. Ќе го разгледаме уште поведението на

функцијата вдолж правецот $y = mx$, каде $m \in \mathbb{R}$ е произволен контролен параметар. Со

замена во функцијата добиваме: $f(x, mx) = \frac{x^3 + m^3 x^3}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{1 + m^3}{1 + m^2} x \rightarrow 0$, кога $x \rightarrow 0$.

Добиваме постојано конзистентен одговор 0, но ова немора да значи дека лимесот на функцијата е 0. Постојат уште многу правци за доближување кон координатниот почеток што не се проверени. Но, без оглед на ова, тестирањето укажува дека изборот $f(0, 0) = 0$ би можел да ја направи функцијата непрекината. Сега веќе имаме мета за „пукање“.

Дефинираме $f(0, 0) = 0$ и одбираме произволно $\varepsilon > 0$. Она што не интересира е дали постои $\delta > 0$ така што ако $\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$ тогаш $|f(x, y) - 0| < \varepsilon$. Забележи дека последново е исполнето доколку $(x, y) = (0, 0)$, па може да претпоставиме дека $(x, y) \neq (0, 0)$. Ќе воведеме смена со поларни координати $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Тогаш за $(x, y) \neq (0, 0)$ добиваме:

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \frac{r^3 (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)}{r^2} = r (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)$$

Сега од тоа што $|\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi| \leq 2$ имаме дека:

$$\left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| = |r (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)| \leq 2r = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2\|(x, y)\|$$

Сега правиме избор $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ и добиваме:

$$\text{ако } \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \text{ тогаш } |f(x, y) - 0| \leq 2\|(x, y)\| < 2\delta = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

што ја потврдува непрекинатоста на функцијата во точката $(0, 0)$.

Пример. Дали постои следниов лимес: $\lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$?

Забелешка. Има сличен пример и во збирката МА2.

Ќе одиме со истиот трик (мислам на смена), но ќе ползуваме во случајов сферни координати: $x = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \theta$ и добиваме:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \left| \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} \right| &= \lim_{r \rightarrow 0} \left| \frac{r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi \cos \theta \sin \theta}{r^2} \right| = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} |r \cos^2 \varphi \sin \varphi \cos \theta \sin \theta| \leq \lim_{r \rightarrow 0} |r| = 0 \end{aligned}$$

Забелешка. Околу сферните координати ќе дискутираме и подоцна, но важно е да ги знаете затоа што ќе ги ползуваме често како погодна смена во простор, како што се поларните координати во рамнината.