

ПРЕДАВАЊЕ 9

(Летен семестар 21/22: 11.05.2022)

„Криволиниски интеграл-примери“

Пример. Пресметај го следниов криволиниски интеграл од прв тип:

$$I = \int_{\gamma} \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \right) dl$$

вдолж крива γ зададена со равенката: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, a > 0$.

Решение: Ја параметризираме астроидата γ со равенките:

$$x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, (0 \leq t \leq 2\pi)$$

откаде за интегралот I добиваме:

$$I = 3a^{\frac{7}{3}} \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) |\sin t \cos t| dt \quad (*)$$

при што ползувавме дека: $x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{4}{3}} (\cos^4 t + \sin^4 t)$ односно:

$$dl = \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt = 3a |\sin t \cos t| dt$$

Да забележиме уште дека подинтегралната функција во интегралот I од релацијата (*)

е $\frac{\pi}{2}$ -периодична, па добиваме:

$$I = 12a^{\frac{7}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t + \sin^4 t) \sin t \cos t dt = 2a^{\frac{7}{3}} (\cos^6 t - \sin^6 t) \Big|_{\pi/2}^0 = 4a^{\frac{7}{3}}.$$

Забелешка. Интегрирањето вдолж крива и над површина е посебен случај на интегрирање над многуобразие со диференцијабилна структура. Кривата ја сметаме за 1-многуобразие додека површината за 2-многуобразие. Општиот концепт што ги опфаќа претходниве е се разбира поимот за n -многуобразие.

Пример. Пресметај го следниов криволиниски интеграл од прв тип:

$$I = \int_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2} dl$$

вдолж крива $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = ax\}$, каде $a > 0$.

Решение: Воведуваме поларни координати. Равенката на кривата γ во поларна форма гласи: $r = a \cos \varphi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Параметризираме по поларниот агол φ , па равенките на кружницата во параметарска форма го добиваат обликот:

$$x = a \cos^2 \varphi, \quad y = a \cos \varphi \sin \varphi, \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

Вдолж кривата γ за подинтегралната функција важи $\sqrt{x^2 + y^2} = a \cos \varphi$. Сега од $dl = a d\varphi$ за интегралот добиваме:

$$I = \int_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2} dl = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = 2a^2.$$

Пример. Пресметај го следниов криволиниски интеграл од втор тип:

$$I = \int_{\gamma^+} (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$$

вдолж кривата $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2, |x| \leq 1\}$ со позитивна ориентација.

Решение: Ја параметризираме кривата по променливата x . Равенките на кривата во параметарска форма го добиваат следниов облик:

$$x = x, \quad y = x^2, \quad -1 \leq x \leq 1$$

откаде за интегралот добиваме:

$$I = \int_{-1}^1 (x^2 - 2xx^2) dx + ((x^2)^2 - 2xx^2) 2x dx = \int_{-1}^1 (x^2 - 2x^3 + 2x^5 - 4x^4) dx = -\frac{14}{15}.$$

Пример. Пресметај го следниов криволиниски интеграл од втор тип:

$$I = \int_{\gamma^+} (2a - y) dx + x dy$$

вдолж циклоидата γ зададена со равенките:

$$\gamma: x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Решение: Да забележиме дека вдолж кривата γ важи:

$$(2a - y) dx + x dy = (2a - a(1 - \cos t)) d(a(t - \sin t)) + a(t - \sin t) d(a(1 - \cos t)) = a^2 t \sin t dt$$

откаде за интегралот добиваме:

$$I = a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t dt = a^2 \left(t \cos t \Big|_0^{2\pi} + \sin t \Big|_0^{2\pi} \right) = -2\pi a^2.$$

Пример. Пресметај го следниов криволиниски интеграл од втор тип:

$$I = \oint_{ABCD} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$$

каде $ABCD$ е раб на квадратот со темиња во точките: $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$, $D(0,-1)$.

Решение: Од адитивноста на криволинискиот интеграл имаме:

$$I = \oint_{ABCD} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = \int_{AB} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} + \int_{BC} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} + \int_{CD} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} + \int_{DA} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$$

Да забележиме дека на сегментите AB и CD важат равенствата:

$$x + y = 1 \text{ односно } x + y = -1$$

соодветно, откаде добиваме дека $dx + dy = 0$. Следува дека:

$$\int_{AB} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = \int_{CD} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = 0$$

На сегментите BC и DA важат равенствата:

$$y - x = 1 \text{ односно } y - x = -1$$

соодветно, откаде добиваме дека $dy = dx$ и $|x| + |y| = 1$. Уште повеќе за $(x, y) \in BC$ имаме дека x опаѓа од 0 до -1 , додека за $(x, y) \in DA$ имаме

дека x расте од 0 до 1. Консеквентно за интегралот добиваме:

$$I = 2 \int_0^{-1} dx + 2 \int_0^1 dx = -2 + 2 = 0.$$

Пример. Пресметај го следниов криволиниски интеграл:

$$I = \int_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{xdy - ydx}{(x-y)^2}$$

вдолж крива што не ја пресекува симетралата на првиот квадрант.

Решение: Нека означиме $P(x, y) = -\frac{y}{(x-y)^2}$, $Q(x, y) = \frac{x}{(x-y)^2}$, $x \neq y$. Да забележиме

дека важат релациите:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{x+y}{(x-y)^3}$$

Следува дека во произволна проста сврзана област што не содржи точки од симетралата на првиот квадрант $y = x$, подинтегралната диференцијална форма ω е потполн диференцијал на некоја функција. Оттука заклучуваме дека интегралот не зависи од кривата на интегрирање туку од крајните точки. Правиме специјален избор на поделови глатка крива:

$$y = -1, dy = 0, \text{ за } 0 \leq x \leq 1 \text{ и } x = 1, dx = 0, \text{ за } -1 \leq y \leq 0$$

Значи одиме по искршена линија. Прво интегрираме по сегментот $y = -1, x \in [0, 1]$, а потоа по сегментот $x = 1, y \in [-1, 0]$. За интегралот добиваме:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} + \int_{-1}^0 \frac{dy}{(1-y)^2} = \frac{1}{x+1} \Big|_0^1 + \frac{1}{1-y} \Big|_{-1}^0 = 1.$$

Пример. Пресметај го следниов криволиниски интеграл:

$$I = \int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right) dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \right) dy$$

вдолж крива што не ја пресекува Oy -оската.

Решение: Да забележиме дека важат релациите:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \right) = -\frac{2y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3} \sin \frac{y}{x}$$

Слично на претходната задача интегрираме вдолж сегментот:

$$y = \pi, dy = 0, \quad 1 \leq x \leq 2$$

откаде за интегралот добиваме:

$$I = \int_1^2 \left(1 - \frac{\pi^2}{x^2} \cos \frac{\pi}{x} \right) dx = \left(x + \pi \sin \frac{\pi}{x} \right) \Big|_1^2 = 1 + \pi.$$

Пример. Определи ја функцијата u ако е даден нејзиниот диференцијал:

$$du = (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy$$

Решение: Одиме со релацијата:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt + C$$

при избор на точка $x_0 = y_0 = 0$. Добиваме:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x t^2 dt + \int_0^y (x^2 - 2xt - t^2) dt + C = \\ &= \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C \end{aligned}$$

Пример. Определи ја функцијата u ако е даден нејзиниот диференцијал:

$$du = \frac{(x^2 + 2xy + 5y^2) dx + (x^2 - 2xy + y^2) dy}{(x+y)^3}$$

Решение: Одиме со релацијата:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y) dt + \int_{y_0}^y Q(x_0, t) dt + C$$

при избор на точка $x_0 = 0$ и $y_0 \neq 0$ е произволно и фиксирано. Да забележиме дека:

$$P(x, y) = \frac{1}{x+y} + \frac{4y^2}{(x+y)^3}, \quad Q(x, y) = \frac{(x-y)^2}{(x+y)^3}$$

откаде добиваме:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x \left(\frac{1}{t+y} + \frac{4y^2}{(t+y)^3} \right) dt + \int_{y_0}^y \frac{dt}{t} + C = \\ &= \ln|x+y| - \ln|y| - \frac{2y^2}{(x+y)^2} + 2 + \ln|y| - \ln|y_0| + C = \\ &= \ln|x+y| - \frac{2y^2}{(x+y)^2} + C_1, \quad C_1 = \text{const} \end{aligned}$$

Пример. Определи ја функцијата ω ако е даден нејзиниот диференцијал:

$$d\omega = (x^2 - 2yz)dx + (y^2 - 2xz)dy + (z^2 - 2xy)dz$$

Решение: Одиме со методот на групирање. Го запишуваме $d\omega$ во следниот облик:

$$\begin{aligned} d\omega &= x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz - 2(yz dx + xz dy + xy dz) = \\ &= d \left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} - 2xyz \right) \end{aligned}$$

откаде добиваме: $\omega(x, y, z) = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} - 2xyz + C$.