

ПРЕДАВАЊЕ 6

(Летен семестар 20/21: 10.03.2021)

„Изводи од повисок ред. Теорема на Шварц“

Дефиниција. Нека $A \subseteq \mathbb{R}^n$ е отворено множества и нека $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ е дадена функција. Парцијален извод на f од k -ти ред во однос на променливите $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ е итеративниот извод:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}(P) = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \left(\dots \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \right) \dots \right) \right) (P)$$

Во продолжение може ќе ја ползуваме и ознаката $f_{x_{i_k} x_{i_{k-1}} \dots x_{i_2} x_{i_1}}(P)$ (од очигледни причини ☺).

Пример. Ќе ја разгледаме функцијата $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ определена со $f(x, t) = e^{-at} \cos x$. Ќе пресметаме неколку парцијални изводи од повисок ред:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} (e^{-at} \cos x) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (-e^{-at} \sin x) = -e^{-at} \cos x \end{aligned}$$

Од друга страна за мешаните парцијални изводи имаме:

$$\begin{aligned} f_{xt}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} (e^{-at} \cos x) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (-ae^{-at} \cos x) = ae^{-at} \sin x \end{aligned}$$

Слично, за другиот мешан извод од втор ред имаме:

$$\begin{aligned} f_{tx}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} (e^{-at} \cos x) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (-e^{-at} \sin x) = ae^{-at} \sin x \end{aligned}$$

Ќе го пресметаме уште парцијалниот извод од прв ред по t : $f_t(x, t) = -ae^{-at} \cos x$.
Оттука може да заклучиме дека функцијата $f(x, t) = e^{-at} \cos x$ е решение на **(ПДР)** **топлотната равенка**:

$$a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

Забелешка. ПДР е кратенка за парцијална диференцијална равенка.

Забелешка. Забележи дека мешаните парцијални изводи се еднакви. Но, ова не е секогаш случај како што покажува следниов пример:

Пример. Ќе ја разгледаме функцијата $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ дефинирана со:

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Тогаш за парцијалните изводи добиваме:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} y \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Сега одиме со пресметка на парцијалните изводи од втор ред:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = -1$$

На сличен начин добиваме дека $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$, па

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

Теоремата на Шварц што следува ни дава доволни услови за еднаквост на мешаните парцијални изводи.

Пред да ја формулираме теоремата на Шварц ќе ни треба следнава дефиниција:

Дефиниција. Нека $A \subseteq \mathbb{R}^n$ е отворено множество и нека $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ е дадена функција. За функцијата f велиме дека е од класа C^k ако постојат сите парцијални изводи од k -ти ред и се непрекинати.

За функцијата f велиме дека е од класа C^∞ ако (или глатка) ако f е од класа C^k за секое $k \in \mathbb{N}$.

Теорема на Шварц. Нека $A \subseteq \mathbb{R}^m$ е отворено множество и нека $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ е дадена функција. Ако f е од класа C^2 тогаш:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Доказ: Забележи дека доволно е тврдењето да го докажеме за $m=2$. Значи претпоставуваме дека $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ е функција од две променливи. Одбираме произволна точка $(a,b) \in A$. Од отвореноста на множеството A забележи дека за доволно мали прираснувања $h, k \in \mathbb{R}$ векторите $(a+h, b)$, $(a, b+k)$ и $(a+h, b+k)$ остануваат во множеството A . Ќе ги разгледаме помошните функции:

$$g(t) = f(a+th, b+k) - f(a+th, b) \text{ и } h(t) = f(a+h, b+tk) - f(a, b+tk)$$

дефинирани за $t \in [0,1]$. Одиме со теоремата на Лагранж за средна вредност. Ја применуваме по два пати на секоја од нив, па добиваме дека постојат $\theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2 \in (0,1)$ такви што:

$$\begin{aligned} g(1) - g(0) &= g'(\theta_1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta_1 h, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta_1 h, b) \right) h = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a + \theta_1 h, b + \theta_2 k) h k \end{aligned}$$

Односно:

$$\begin{aligned}h(1) - h(0) &= h'(\beta_1) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a+h, b+\beta_1 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b+\beta_1 k) \right) k = \\&= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\beta_2 h, b+\beta_1 k) h k\end{aligned}$$

Но забележи дека разликите $h(1) - h(0)$ и $g(1) - g(0)$ се меѓусебно еднакви. Ова значи дека:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\beta_2 h, b+\beta_1 k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k)$$

Сега од непрекинатоста на мешаните парцијални изводи тврдењето следува.