

ПРЕДАВАЊЕ 13

(Летен семестар 20/21: 06.04.2021)

„Интегралите што зависат од параметар“

Пресметувањето на Римановиот интеграл $\int_a^b f(x)dx$ резултира со реален број. Меѓутоа, доколку подинтегралната функција на разгледуваниот интеграл или неговите граници зависат од некој реален параметар y , т.е. е од облик $\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx$ тогаш резултатот на интеграција е реална функција од променливата y , дефинирана за оние вредности на y за кои интегралот постои. Обично овие функции не се елементарни или пак определбата на нивниот елементарен запис не е едноставен проблем. Затоа е важно да се развијат методи со чија помош ќе се испитуваат овие функции без нивна директна пресметка. Во продолжение вниманието ќе биде посветено на ова.

Прави параметарски интегралите

Ќе ја разгледаме функцијата $I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$. Она што е наш предмет на интерес се прашањата околу гранична вредност, непрекинатост, диференцијабилност или интеграбилност на овие функции. Ќе ја ползуваме следнава пропозиција од **Анализа 1**

Пропозиција. Нека функцијата $f(x,y)$ е интеграбилна по променливата x на сегментот $[a,b]$ за секое y од некоја околина V на точката $y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Понатаму, нека $f(x,y)$ рамномерно конвергира кон функција $\varphi(x)$ кога $y \rightarrow y_0$, каде $x \in [a,b]$. Тогаш важи следнава релација:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = \int_a^b \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) \right) dx = \int_a^b \varphi(x) dx$$

Забелешка. $\overline{\mathbb{R}}$ е ознака за проширената реална права вклучително $\pm\infty$.

Одиде со теоремата за непрекинатост на овие функции

Теорема. Нека P е правоаголник $[a, b] \times [c, d]$ и нека $f(x, y)$ е непрекината функција на P . Тогаш $I(y)$ е непрекината функција на сегментот $[c, d]$.

Доказ: Секоја непрекината функција на компактно множество е и рамномерно непрекината. Ова значи дека функцијата f е рамномерно непрекината функција на правоаголникот P . Следува дека за произволно $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ такво што:

$$(x', y'), (x'', y'') \in P \text{ и } |x' - x''| < \delta, |y' - y''| < \delta \Rightarrow |f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon$$

Одбираме произволни точки $y_0, y \in [c, d]$ и $x \in [a, b]$. Сега правиме избор $x' = x'' = x$ односно $y' = y$ и $y'' = y_0$, па од горното тврдење имаме дека:

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon, \text{ за сите } x \in [a, b] \text{ и } |y - y_0| < \delta$$

Поинаку кажано $f(x, y)$ рамномерно конвергира кон $f(x, y_0)$ кога $y \rightarrow y_0$, каде $x \in [a, b]$. Од претходната пропозиција добиваме дека:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx = I(y_0)$$

Ова значи дека функцијата $I(y)$ е непрекината во точката y_0 . Од произволноста на y_0 тврдењето следува.

Следнава теорема ни дава доволни услови за диференцијабилност на $I(y)$

Теорема. Нека $P = [a, b] \times [c, d]$ и нека функцијата $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ ги задоволува следниве услови:

- 1) f е непрекината по $x \in [a, b]$ за секое $y \in [c, d]$;
- 2) f има парцијален извод $\frac{\partial f}{\partial y}$ што е непрекината функција на P .

Тогаш функцијата $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ е непрекината диференцијабилна на сегментот $[c, d]$ и важи релацијата:

$$I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx \quad (*)$$

Доказ: Забележи дека според претпоставката 1) функцијата $I(y)$ е дефинирана за секое $y \in [c, d]$. Одбираме произволно $y \in [c, d]$ и $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ такво што $y+h \in [c, d]$. Одиме со теоремата на Лагранж на функцијата $f(x, y)$ гледана како функција од y на сегментот $[y, y+h]$ за фиксирано $x \in [a, b]$, па имаме:

$$\frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta h)$$

Откаде после интеграцијата добиваме:

$$\frac{I(y+h) - I(y)}{h} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta h) dx \quad (**)$$

за некое θ , $0 < \theta < 1$. Слично, како во доказот на претходната теорема непрекинатоста на функцијата $\frac{\partial f}{\partial y}$ на правоаголникот P повлекува рамномерна конвергенција на $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta h)$ кон функцијата $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ кога $h \rightarrow 0$ каде $x \in [a, b]$. Затоа кога $h \rightarrow 0$ со лимесот може да влеземе во знакот на интегралот во релацијата (**) што ни ја дава посакуваната релација (*). Непрекинатоста на функцијата $I'(y)$ е последица на релацијата (*), претпоставката 2) и претходната теорема.

Забелешка. Претходната теорема често се вели дека е „*Лајбницово правило за диференцирање на параметарски интеграл*“.

Пример: Пресметај го следниов интеграл:

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \right) \frac{dx}{\cos x}, \quad |a| < 1$$

Решение: Одбираме произволно $\varepsilon > 0$. Подинтегралната функција $f(x, a)$ ја продолжуваме по непрекинатост, ползувајќи го правилото на Лопитал:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x, a) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln \left(\frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \right) \frac{1}{\cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1-a \cos x}{1+a \cos x} \frac{(-a \sin x)(1-a \cos x) - (1+a \cos x)a \sin x}{(1-a \cos x)^2} \frac{1}{(-\sin x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{2a}{1-a^2 \cos^2 x} = 2a \end{aligned}$$

Значи подинтегралната функција ја додефинираме со:

$$f(x, a) = \begin{cases} \frac{1}{\cos x} \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x}, & x \neq \frac{\pi}{2} \\ 2a, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Го пресметуваме парцијалниот извод по параметарот a :

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x, a) = \frac{2}{1-a^2 \cos^2 x}$$

Ќе го разгледаме правоаголникот: $P = \left\{ (x, a) \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, |a| \leq 1 - \varepsilon < 1 \right\}$. Да забележиме

дека функциите $f(x, a)$ и $\frac{\partial f}{\partial a}(x, a)$ се непрекинати на P . Одиме со теоремата на Лајбниц на правоаголникот P :

$$I'(a) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-a^2 \cos^2 x} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x + \sin^2 x - a^2 \cos^2 x} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x (1-a^2 + \tan^2 x)}$$

Во последниот интеграл воведуваме смена $t = \tan x$ и добиваме:

$$I'(a) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x (1-a^2 + \tan^2 x)} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1-a^2+t^2} = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

Оттука со интегрирање имаме:

$$I(a) = \pi \arcsin a + C$$

Од произволноста на $\varepsilon > 0$ горната релација важи за секое $|a| < 1$. Да забележиме уште дека $I(0) = 0$, па $C = 0$. Значи: $I(a) = \pi \arcsin a, |a| < 1$.

Забелешка. Забележи дека во претходната теорема претпоставката вели дека параметарот y припаѓа во затворен сегмент $[c, d]$, но тоа не ја оневозможува нејзината примена и на отворениот интервал $(-1, 1)$. Имено произволна точка од $(-1, 1)$ може да се вклучи во некој затворен сегмент $[c, d]$ што целосно се содржи во $(-1, 1)$.

Следнава теорема е обопштување на теоремата на Лајбниц во случајот кога границите на интегралот зависат од параметар:

Теорема: Нека f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ се непрекинати реални функции на правоаголникот $P = [\alpha, \beta] \times [c, d]$ и нека $a(y)$ и $b(y)$ се диференцијабилни функции дефинирани на сегментот $[c, d]$ со вредности во сегментот $[\alpha, \beta]$. Тогаш функцијата:

$$I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx$$

е диференцијабилна на сегментот $[c, d]$ и важи:

$$I'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx - f(a(y), y)a'(y) + f(b(y), y)b'(y)$$

Доказ: Забележи дека интегралот $I(y)$ може да се запише во обликот:

$$I(y) = F(y, u, v) = \int_u^v f(x, y) dx, \text{ каде } u = a(y) \text{ и } v = b(y)$$

Сега според претходната теорема на Лајбниц имаме дека $\frac{\partial F}{\partial y} = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$, додека според правилото за диференцирање на интеграл по долна (горна) граница (види **Анализа 1**) имаме дека:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -f(a(y), y) \text{ и } \frac{\partial F}{\partial v} = f(b(y), y)$$

Од друга страна според правилото за диференцирање на сложена функција имаме дека:

$$I'(y) = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} a'(y) + \frac{\partial F}{\partial v} b'(y)$$

Со соодветна замена го добиваме обопштеното Лајбницово правило за диференцирање на параметарски интеграл.

Забелешка: Интегрирањето на параметарски интегралите ќе ги дискутираме откако ќе ги воведеме повеќекратните интегралите.

Забелешка: Во збирката имате убави примери што ја илустрираат и оваа теорема.