

ПРЕДАВАЊЕ 5

(Летен семестар 20/21: 09.03.2021)

„Правило за диференцирање на сложена функција“

Теорема. Нека $U \subseteq \mathbb{R}^n$ и $V \subseteq \mathbb{R}^m$ се две отворени множества. Понатаму, нека $f: U \rightarrow V$ и $g: V \rightarrow \mathbb{R}^p$ се две функции. Ако f е диференцијабилна во $P \in U$ и g е диференцијабилна во $Q = f(P) \in V$ тогаш $g \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$ е диференцијабилна во P со извод:

$$D(g \circ f)(P) = (D(g)(Q))(D(f)(P))$$

Пред да го презентираме доказот на ова важно правило интересно е да го разгледаме во некои посебни случаи. На пример, нека се дадени функциите:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ и } g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Ги запишуваме во облик: $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ односно $w = g(y, z)$. Тогаш:

$$Df(P) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx}(P) \\ \frac{df_2}{dx}(P) \end{pmatrix} \text{ и } Dg(Q) = \left(\frac{\partial g}{\partial y}(Q), \frac{\partial g}{\partial z}(Q) \right).$$

Оттука според правилото за диференцирање на сложена функција добиваме:

$$\frac{d(g \circ f)}{dx} = D(g \circ f)(P) = D(g)(Q)D(f)(P) = \frac{\partial g}{\partial y}(Q) \frac{df_1}{dx}(P) + \frac{\partial g}{\partial z}(Q) \frac{df_2}{dx}(P).$$

Пример. Нека е дадена функцијата $f(x) = (x^2, x^3)$ и $g(y, z) = yz$. Ако го примениме правилото за диференцирање на сложена функција добиваме:

$$D(g \circ f)(x) = z(2x) + y(3x^2) = 5x^4$$

Од друга страна забележи дека $(g \circ f)(x) = x^5$, па од Анализа 1 знаеме навистина дека изводот на $(g \circ f)(x) = x^5$ е $\frac{dx^5}{dx} = 5x^4$.

Сега ќе претпоставиме дека се дадени следниве функции:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ и } g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Ги запишуваме во облик: $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ односно $w = g(u, v)$. Тогаш:

$$Df(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(P) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(P) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(P) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(P) \end{pmatrix} \text{ и } Dg(Q) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(Q), \frac{\partial g}{\partial v}(Q) \right)$$

Во овој случај за изводот на сложената функција добиваме:

$$\begin{aligned} D(g \circ f) &= \left(\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}, \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial u}(Q) \frac{\partial f_1}{\partial x}(P) + \frac{\partial g}{\partial v}(Q) \frac{\partial f_2}{\partial x}(P), \frac{\partial g}{\partial u}(Q) \frac{\partial f_1}{\partial y}(P) + \frac{\partial g}{\partial v}(Q) \frac{\partial f_2}{\partial y}(P) \right) = \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial u}(Q) \frac{\partial u}{\partial x}(P) + \frac{\partial g}{\partial v}(Q) \frac{\partial v}{\partial x}(P), \frac{\partial g}{\partial u}(Q) \frac{\partial u}{\partial y}(P) + \frac{\partial g}{\partial v}(Q) \frac{\partial v}{\partial y}(P) \right) = \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

при што ползувавме дека $u = f_1(x, y)$ и $v = f_2(x, y)$. Забележи само дека во последниот ред бевме малку „лабави“ па ги испуштивме P и Q .

Ако ја разделиме оваа векторска равенка на нејзините компоненти добиваме:

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}(Q) \frac{\partial u}{\partial x}(P) + \frac{\partial g}{\partial v}(Q) \frac{\partial v}{\partial x}(P)$$

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}(Q) \frac{\partial u}{\partial y}(P) + \frac{\partial g}{\partial v}(Q) \frac{\partial v}{\partial y}(P)$$

Забелешка. Правилото за диференцирање на *сложена* функција може да го ползуваме за да ги докажеме некои од *едноставните* правила за диференцирање. Имено нека се дадени функциите:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ и } g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Претпоставуваме дека функциите f и g се диференцијабилни во точката P . Дали може да заклучиме диференцијабилност на $f + g$? Ќе ја разгледаме функцијата $a: \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ дефинирана со:

$$a(u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_m) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_m + v_m)$$

Забележи дека $a: \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ како линеарна полиномна функција е диференцијабилна. Ќе ја разгледаме и функцијата $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ што праќа произволна точка Q во $(f(Q), g(Q))$, т.е. $h(Q) = (f(Q), g(Q))$. Композицијата $a \circ h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ е функцијата што сакаме да ја диференцираме, со оглед на тоа што произволна точка Q ја праќа во $f(Q) + g(Q)$. Според правилото за диференцирање на сложена функција заклучуваме дека $a \circ h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ е диференцијабилна во точката P и важи:

$$D(f + g)(P) = Df(P) + Dg(P)$$

Сега ќе разгледаме уште еден специјален случај. Имено правиме избор за $m = 1$. Функцијата $a: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ќе ја замениме со нова функција (ќе ја задржиме истата ознака) дефинирана со $a(x, y) = xy$. Забележи дека a е диференцијабилна функција со извод:

$$Da(x, y) = (y, x)$$

Повторно според правилото за диференцирање на сложена функција заклучуваме дека композицијата $a \circ h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, имено функцијата што ја праќа точката P во производот $f(P)g(P)$, е диференцијабилна и нејзиниот извод го задоволува вообичаеното правило за производ:

$$D(fg)(P) = g(P)D(f)(P) + f(P)D(g)(P)$$

Ќе разгледаме уште една илустрација на правилото за диференцирање на сложена функција. Нека воведеме поларна смена со равенките:

$$x = r \cos \theta \quad \text{и} \quad y = r \sin \theta$$

Тогаш за функцијата $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ добиваме:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta\end{aligned}$$

Слично, за другиот парцијален извод имаме:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = \\ &= -\frac{\partial f}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \theta\end{aligned}$$

Добиените равенства можат да добијат и матричен запис со:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Сега забележи дека детерминантата на матрицата $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$ е еднаква на r .

Значи ако $r \neq 0$ постои инверзна, па добиваме:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & -\sin \theta \\ r \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

Се враќаме на доказот на теоремата за диференцирање на сложена функција. Ќе ни треба следнава:

Лема. Нека $A \subseteq \mathbb{R}^n$ е отворено подмножество и нека $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ е дадена функција. Ако f е диференцијабилна во точката P тогаш постои константа $M \geq 0$ и $\delta > 0$ така што ако $\|\overrightarrow{PQ}\| < \delta$ тогаш:

$$\|f(Q) - f(P)\| < M \|\overrightarrow{PQ}\|$$

Доказ: Од претпоставката за диференцијабилност на f во точката P постои константа $\delta > 0$ така што ако $\|\overrightarrow{PQ}\| < \delta$ тогаш:

$$\frac{\|f(Q) - f(P) - Df(P)\overrightarrow{PQ}\|}{\|\overrightarrow{PQ}\|} < 1$$

Следува дека:

$$\|f(Q) - f(P) - Df(P)\overrightarrow{PQ}\| < \|\overrightarrow{PQ}\|$$

Но тогаш имаме:

$$\begin{aligned} \|f(Q) - f(P)\| &= \|f(Q) - f(P) - Df(P)\overrightarrow{PQ} + Df(P)\overrightarrow{PQ}\| \leq \\ &\leq \|f(Q) - f(P) - Df(P)\overrightarrow{PQ}\| + \|Df(P)\overrightarrow{PQ}\| \leq \\ &\leq \|\overrightarrow{PQ}\| + K \|\overrightarrow{PQ}\| = M \|\overrightarrow{PQ}\| \end{aligned}$$

каде $M = 1 + K$.

Одиме со доказ на теоремата. Ќе нотираме неколку ознаки. Сакаме да го пресметаме изводот во точката P . Нека $Q = f(P)$. Понатаму, нека P' е точка во U (за која претпоставуваме дека е блиску до P). Конечно, нека $Q' = f(P')$ (од тоа што P' е блиску до P , може да очекуваме Q' да биде блиску до Q).

Трикот во доказот е внимателни да се дефинира помошна функција $G : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ со:

$$G(Q') = \begin{cases} \frac{g(Q') - g(Q) - Dg(Q)(\overrightarrow{QQ'})}{\|\overrightarrow{QQ'}\|}, & \text{ако } Q' \neq Q \\ \vec{0} & , \text{ако } Q' = Q \end{cases}$$

Забележи дека G е непрекината во точката $Q = f(P)$, бидејќи g е диференцијабилна во Q . Оттука имаме:

$$\begin{aligned} & \frac{(g \circ f)(P') - (g \circ f)(P) - Dg(Q)Df(P)(\overrightarrow{PP'})}{\|\overrightarrow{PP'}\|} = \\ & = Dg(Q) \frac{f(P') - f(P) - Df(P)(\overrightarrow{PP'})}{\|\overrightarrow{PP'}\|} + G(f(P')) \frac{\|f(P') - f(P)\|}{\|\overrightarrow{PP'}\|} \end{aligned}$$

Сега од тоа што P' произволно се доближува до P , забележи дека:

$$\frac{f(P') - f(P) - Df(P)(\overrightarrow{PP'})}{\|\overrightarrow{PP'}\|},$$

и $G(f(P'))$ истовремено произволно се доближуваат до нулата. Уште повеќе од претходната лема имаме дека :

$$\frac{\|f(P') - f(P)\|}{\|\overrightarrow{PP'}\|} \leq M$$

за некое $M \geq 0$. Но тогаш

$$\frac{(g \circ f)(P') - (g \circ f)(P) - Dg(Q)Df(P)(\overrightarrow{PP'})}{\|\overrightarrow{PP'}\|}$$

произволно се доближува до нулата, што е нашата посакувана цел. Заклучокот следува.