

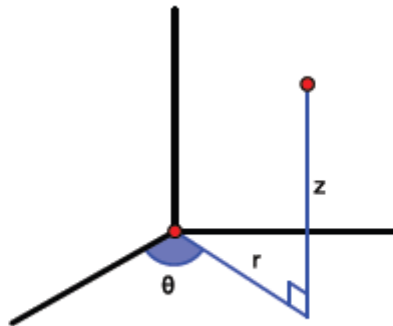
ПРЕДАВАЊЕ 19

(Летен семестар 20/21: 27.04.2021)

„Цилиндрични и сферни координати“

Цилиндрични координати (r, θ, z) во $\mathbb{R}^3$.

Цилиндрични координати се поларни координати во xy -рамнината заедно со декартовата z -координата. За да претставиш точка со цилиндрични координати (r, θ, z) прво оди r -единици вдоль позитивниот дел на x -оската, потоа ротирај во насока спротивна од стрелките на часовникот околу z -оската за агол θ и потоа оди вертикално z -единици. Овие координати се прикажани на слика 1. Ова те носи до точката $(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ во xyz -просторот.



Слика1: Цилиндрични координати (r, θ, z)

Ова значи дека конверзијата од цилиндрични во правоаголни координати е определена со релациите:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

каде $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Целиот простор $\mathbb{R}^3$ е покриен со избор за $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ и $-\infty < z < +\infty$.

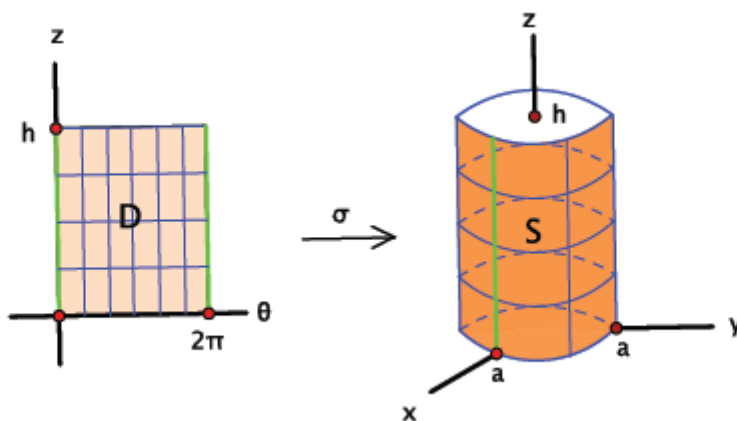
Пример. Ќе параметризираме кружен цилиндер со радиус a и висина h определен со релациите:

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ и } 0 \leq z \leq h$$

Оската на цилиндерот е z -оската.

Во цилиндрични координати, вдолж цилиндерот, r е фиксиран во радиусот a , но θ и z може да варираат независно. Површината е помината во исцелост ставајќи $r = a$ и менувајќи ги θ и z во граници: $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq h$. Поинаку кажано, можеме да го параметризираме цилиндерот ползувајќи ги θ и z како параметри. Со $r = a$ фиксно, конверзијата од цилиндрични во правоаголни координати ни ја дава следнава параметризација на цилиндерот:

$$\sigma: [0, 2\pi] \times [0, h] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \sigma(\theta, z) = (a \cos \theta, a \sin \theta, z)$$



Слика 2: Параметризација на цилиндер ползувајќи ги цилиндричните координати θ и z како параметри

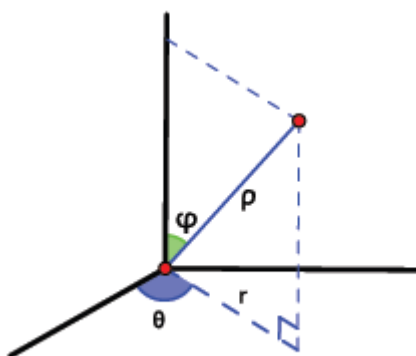
Полезно е да забележиме како σ го трансформира правоаголникот $D = [0, 2\pi] \times [0, h]$ во цилиндерот S . Во поларни (односно цилиндрични) координати $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$ претставуваат исто множество во xyz -просторот. Ова значи дека σ ги пресликува точките $(0, z)$ и $(2\pi, z)$ од θz -параметарската рамнина во иста точка од $\mathbb{R}^3$. Освен овие, сите останати различни точки од D се пресликуваат со σ во различни точки од xyz -просторот. Еден начин за конструкција на цилиндер е да земеме правоаголник, како D и да ги залепиме заедно (или поистоветиме) точките $(0, z)$ од левиот раб со точките $(2\pi, z)$ од десниот раб. Геометриски е јасно дека крајниот резултат е цилиндер, а σ ни дава математичка формула што токму тоа и го спроведува.

Сферни координати (ρ, ϕ, θ) во $\mathbb{R}^3$.

Трите сферни координати на дадена точка од $\mathbb{R}^3$ геометриски ги толкуваме на следниов начин:

- 1) ρ е растојанието од координатниот почеток до дадената точка.
- 2) ϕ е аголот меѓу позитивниот дел на z -оската и радиус векторот на точката.
- 3) θ е вообичаениот поларен (цилиндричен) агол.

За да претставиш точка од $\mathbb{R}^3$ со сферни координати (ρ, ϕ, θ) , прво оди ρ -единици вдолж позитивниот дел на z -оската. Ова ќе те доведе до точката $(0, 0, \rho)$ во правоаголни координати. Потоа ротирај спротивно од стрелките на часовникот околу позитивниот дел од y -оската за агол ϕ што ќе те доведе до точката $(\rho \sin \phi, 0, \rho \cos \phi)$ во xz -рамнината, на растојание ρ од координатниот почеток $(0, 0, 0)$ и $r = \rho \sin \phi$ до z -оската. Конечно, ротирај околу позитивниот дел од z -оската за агол θ . Ова ќе те доведе до точката $(\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \phi)$. Координатите се прикажани на слика 3.



Слика3: Сферни координати (ρ, ϕ, θ)

Ова значи дека конверзијата од сферни во правоаголни координати е определена со релациите:

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

Според теоремата на Питагора растојанието до координатниот почеток е определено со $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Целиот простор $\mathbb{R}^3$ е покриен со сферни координати во интервалите $\rho \geq 0$, $0 \leq \phi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Забележи дека аголниот интервал $0 \leq \phi \leq \pi$ се менува од позитивниот дел на z -оската до негативниот дел од z -оската, додека $0 \leq \theta \leq 2\pi$ прави комплетна ротација околу z -оската. Ова е причината зошто

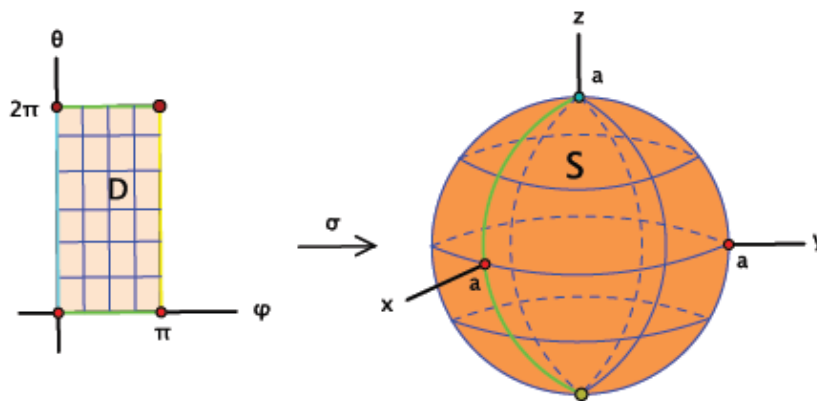
вредности на ϕ во интервалот $\pi \leq \phi \leq 2\pi$ не се потребни (ќе дуплираат точки што веќе се покриени).

Пример. Ќе ја параметризираме сферата со радиус a и центар во координатниот почеток:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Во сферни координати површината на сферата е помината во исцелост ставајќи $\rho = a$ и менувајќи ги θ и ϕ во граници: $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Ова значи дека θ и ϕ можеме да ги ползуваме како параметри, па преку конверзија од сферни во правоаголни координати ја добиваме параметризацијата:

$$\sigma: [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \sigma(\phi, \theta) = (a \sin \phi \cos \theta, a \sin \phi \sin \theta, a \cos \phi)$$



Слика 4: Параметризација на сферата ползувајќи ги сферните координати ϕ и θ како параметри

Повторно параметризацијата дава јасни инструкции како да се трансформира правоаголникот $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ во сфера. Сите точки за кои $\phi = 0$ се пресликуваат во северниот пол. Ова се точките од левиот раб на $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. Слично, десниот раб на $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, каде $\phi = \pi$, се пресликува во јужниот пол. Конечно точките каде $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$ се идентификуваат во меридијан на сферата во xz -рамнината. Значи за да добиеме сфера од правоаголникот D доволно е левиот и десниот раб да ги колапсираме до точка, а потоа да ги „зипуваме“ преостанатите две страни за да ја затворат површината.