

ПРЕДАВАЊЕ 17

(Летен семестар 20/21: 20.04.2021)

„Смена на променливи кај двојни интеграли“

Дефиниција. За функција $f:U \rightarrow V$ меѓу две отворени подмножества од $\mathbb{R}^n$ велиме дека е **дифеоморфизам** ако:

- 1) f е биекција,
- 2) f е диференцијабилно, и
- 3) f^{-1} е диференцијабилно.

Забелешка. Забележи дека според дефиницијата за инверзна функција, $f \circ f^{-1}:V \rightarrow V$ и $f^{-1} \circ f:U \rightarrow U$ се истовремено идентични функции, па имаме:

$$(f \circ f^{-1})(\vec{y}) = \vec{y} \quad \text{и} \quad (f^{-1} \circ f)(\vec{x}) = \vec{x}$$

Оттука следува дека:

$$Df(\vec{x})Df^{-1}(\vec{y}) = I_n \quad \text{и} \quad Df^{-1}(\vec{y})Df(\vec{x}) = I_n$$

според правилото за диференцирање на сложена функција. Ако преминеме на детерминанти добиваме дека:

$$\det(Df)\det(Df^{-1}) = \det I_n = 1$$

Ова значи дека:

$$\det(Df) \neq 0 \quad \text{и} \quad \det(Df^{-1}) = (\det(Df))^{-1}$$

Подготвени сме за формулација на **теоремата за инверзна функција**:

Теорема. (за инверзна функција) Нека $U \subseteq \mathbb{R}^n$ е отворено подмножество и нека $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ е дадена функција. Претпоставуваме дека:

- 1) f е инјективно,
- 2) f е C^1 , и
- 3) $Df(\vec{x}) \neq 0$, за сите $\vec{x} \in U$.

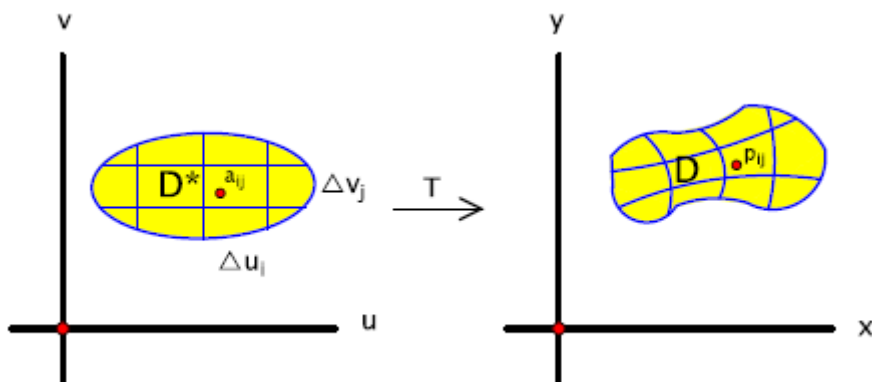
Тогаш $V = f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ е отворено и индуцираното пресликување $f: U \rightarrow V$ е дифеоморфизам.

Нека $\iint_D f(x, y) dx dy$ е даден двоен интеграл. Наша посакувана цел е да дадеме опис како да го замениме дадениот интеграл со негов еквивалент во нова област на интеграција и нова подинтегрална функција. Рамката што ќе ни го овозможи ова е претпоставката дека постои дифеоморфизам $T: D^* \rightarrow D$, каде D^* е подмножество од рамнината. Новиот интеграл ќе биде интеграл над D^* . Координатите во доменот и кодоменот е пожелно да имаат различни ознаки, па ќе гледаме на дифеоморфизмот T како на трансформација од uv -рамнината во xu -рамнината и пишуваме:

$$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

Значи она што го сакаме е да го замениме дадениот интеграл над D во однос на променливите x и y со нов интеграл над D^* во однос на променливите u и v . Ќе ја презентираме главната идеја.

Почнуваме со поделба на D^* во мали потправоаголници со димензии Δu_i и Δv_j како што е прикажано на слика 1:



Смена на променливи: x и y како функции од u и v преку трансформацијата T

Дифеоморфизмот T праќа типичен потправоаголник со плоштина $\Delta u_i \Delta v_j$ во uv -рамнината во мал криволиниски четириаголник во xu -рамнината. Нека со ΔP_{ij} ја означиме плоштината на криволинискиот четириаголник. Правиме избор на примерок

точки p_{ij} од секој криволиниски четириаголник, па формираме сума што наликува на Римановата и е апроксимација на интегралот над D :

$$\iint_D f(x, y) dx dy \approx \sum_{i,j} f(p_{ij}) \Delta P_{ij} \quad (*)$$

За да го претвориме ова во Риманова сума над D^* , треба да воспоставиме врска помеѓу плоштините на потправоаголниците и криволиниските четириаголници. За да го направиме ова ќе ја ползуваме апроксимацијата на T од прв ред според Тејлоровиот развој. Одбираме точка a_{ij} од (i, j) –от потправоаголник од D^* таква што $T(a_{ij}) = p_{ij}$. Сега според апроксимацијата од прв ред за точки $u \in D^*$ што се близу a_{ij} имаме дека:

$$\begin{aligned} T(u) &\approx T(a_{ij}) + DT(a_{ij})(u - a_{ij}) \approx p_{ij} + DT(a_{ij})(u - a_{ij}) \\ &\approx (p_{ij} - DT(a_{ij}) \cdot a_{ij}) + DT(a_{ij}) \cdot u \end{aligned}$$

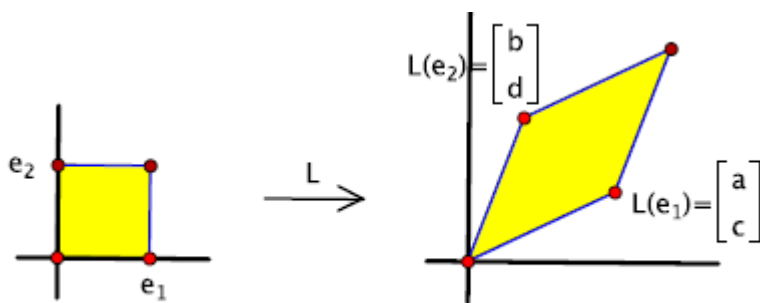
Да го следиме однесувањето на дифеоморфизмот T воопшто не е лесна задача, но затоа можеме да следиме како горната апроксимација го трансформира (i, j) –от потправоаголник ползувајќи малку алатки од Линеарна Алгебра.

Забележи дека изводот $DT(a_{ij})$ е 2×2 матрица. Од друга страна секоја 2×2 матрица

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ определува линеарна трансформација $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ со релацијата

$L(x) = Ax$. Оваа трансформација го праќа единичниот квадрат определен со единечните вектори e_1 и e_2 во паралелограм определен со векторите $L(e_1) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ и

$L(e_2) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ што се колони во матрицата A (види слика 2).



Слика 2: Линеарна трансформација L го праќа квадратот определен со e_1 и e_2 во паралелограм определен со $L(e_1)$ и $L(e_2)$.

Ползувајќи малку Линеарна Алгебра плоштината на овој паралелограм е определена со $|\det[L(e_1) \ L(e_2)]|$, каде $[L(e_1) \ L(e_2)]$ е матрица чии редици се $L(e_1)$ и $L(e_2)$ соодветно. Ова е точно транспонираната матрица A^t . Ова пак значи дека плоштината на паралелограмот е $|\det(A^t)| = |\det(A)|$. Посебно, трансформацијата L ја сменила плоштината за фактор $|\det(A)|$.

Овој принцип лесно се пренесува на малку поопшти случаи:

1) Нека се дадени ненулти скалари l и ω и нека P е $|l| \times |\omega|$ правоаголник определен со векторите le_1 и ωe_2 . Тогаш L го праќа P во паралелограм P_1 определен со векторите $L(le_1) = lL(e_1)$ и $L(\omega e_2) = \omega L(e_2)$. Забележи дека повторно плоштината на правоаголникот и паралелограмот се разликува за фактор $|\det(A)|$.

2) Претпоставуваме дека правоаголникот P од претходниот случај го транслатираме за константен вектор a . Ова резултира со нов $|l| \times |\omega|$ правоаголник P' што ги содржи сите точки $a + x$, каде $x \in P$ и само нив. Од линеарноста имаме $L(a + x) = L(a) + L(x)$, па заклучуваме дека L го праќа P' во транслацијата на паралелограмот $L(P) = P_1$ за вектор $L(a)$. Нека ја означиме оваа транслација на P_1 со P'_1 . Имајќи во предвид дека транслацијата не влијае на плоштината, заклучуваме дека плоштините на P' и неговата слика $L(P') = P'_1$ повторно се разликуваат за фактор $|\det(A)|$.

Ова укажува на следнава лема:

Лема. Линеарна трансформација $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ претставена во однос на стандардната база со 2×2 матрица праќа правоаголници чии страни се паралелни со координатните оски во паралелограми и ја менува плоштината на правоаголниците за фактор $|\det(A)|$.

Се враќаме на апроксимацијата од прв ред за дифеоморфизмот T . Заклучуваме дека мултипликација со матрицата $DT(a_{ij})$ го трансформира потправоаголникот со плоштина $\Delta u_i \Delta v_j$ што ја содржи точката a_{ij} во паралелограм со плоштина $|\det(DT(a_{ij}))| \Delta u_i \Delta v_j$. Детерминантата на изводот, $\det(DT(a_{ij}))$, уште велиме дека е **Јакобијан** во точката a_{ij} . Оттука, после дополнителни транслации, апроксимацијата од прв ред на T го праќа потправоаголникот што ја содржи точката a_{ij} во паралелограм таков што:

- 1) Го апроксимира криволинискиот четириаголник со плоштина ΔP_{ij} што ја содржи p_{ij}
- 2) Има плоштина $|\det(DT(a_{ij}))| \Delta u_i \Delta v_j$.

Оттука добиваме дека релацијата (*) добива нов облик:

$$\iint_D f(x, y) dx dy \approx \sum_{i,j} f(p_{ij}) \Delta p_{ij} \approx f(T(a_{ij})) \left| \det(DT(a_{ij})) \right| \Delta u_i \Delta v_j$$

Ако во горната релација пуштиме $\Delta u_i \rightarrow 0$ и $\Delta v_j \rightarrow 0$ десната страна преминува во интеграл над D^* , што ни го дава следниов важен резултат познат како **теорема за смена на променливи кај двоен интеграл**:

Теорема. Нека $T:U \rightarrow V$ е дифеоморфизам меѓу отворени подмножества од рамнината $\mathbb{R}^2$:

$$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

Нека $D^* \subseteq U$ е подмножество и нека $D = T(D^*) \subseteq V$. Нека $f:D \rightarrow \mathbb{R}$ е дадена функција. Ако f е интегрибилна на D тогаш:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \det DT(u, v) \right| du dv.$$

Во случајот со поларни координати смената е дадена со релацијата:

$$(x, y) = T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Тогаш $DT(r, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$ и $\left| \det DT(r, \theta) \right| = \left| r(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \right| = r$. Според теоремата за смена на променливи ова значи дека " $dx dy = r dr d\theta$ ", па поларните координати го трансформираат интегралот како што следува:

Последица. Во поларна смена

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta,$$

каде D^* е област од $r\theta$ -рамнината што го опишува D во поларни координати.