

ПРЕДАВАЊЕ 18

(Летен семестар 20/21: 21.04.2021)

„Смена на променливи кај двојни интеграли-примери“

Ќе разгледаме неколку примери што ја илустрираат теоремата за смена на променливи кај двојните интеграли:

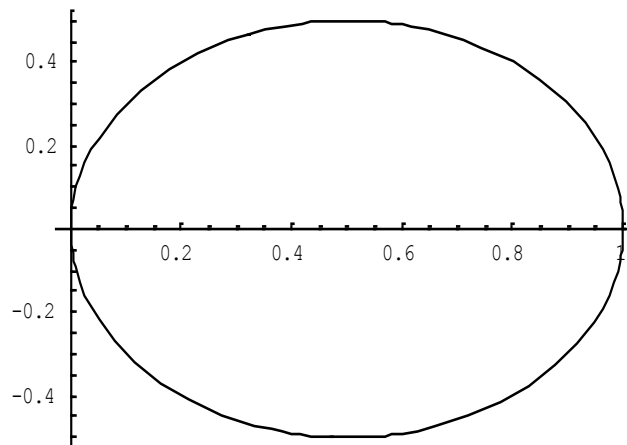
Пример. Во двојниот интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ воведи поларна смена и определи ги новите граници за интегрирање, каде $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq x\}$.

Решение: Го пресметуваме Јакобијанот на поларна смена:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r$$

Да забележиме дека новите граници за интегрирање се:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad 0 \leq r \leq \cos \varphi$$



откаде за смената во интегралот добиваме:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr$$

Пример. Воведи поларна смена во повторениот интеграл:

$$I = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$$

сметајќи ја подинтегралната функција за непрекината во областа на интегрирање.

Решение: Подинтегралната функција f е непрекината на областа определена со:

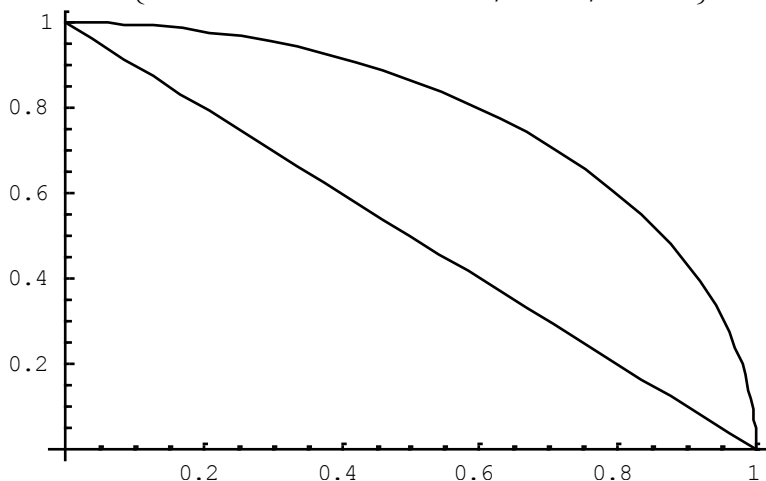
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 1-x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\},$$

па повторениот интеграл I е еднаков со двојниот интеграл:

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

Воведуваме поларна смена $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, па го претставуваме множеството D во облик:

$$D = \left\{ (r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sin \varphi + \cos \varphi} \leq r \leq 1 \right\}$$



или во облик:

$$D = \left\{ (r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{\sqrt{2}} \leq r \leq 1, \arcsin \frac{1}{r\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{r\sqrt{2}} \right\}$$

После замената на секое од наведените претставувања на областа D , соодветно, интегралот I го добива обликот:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{\sin \varphi + \cos \varphi}}^1 f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 r dr \int_{\arcsin \frac{1}{r\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{r\sqrt{2}}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi$$

Пример. Во интегралот $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ воведи смена на променливите со релациите

$x = u \cos^4 v$, $y = u \sin^4 v$, а потоа направи премин од двоен кон повторен интеграл, сметајќи ја подинтегралната функција f за непрекината, каде работ на областа за интегрирање ∂D е зададен со равенките $\partial D: \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$, $a > 0$.

Решение: Го пресметуваме Јакобијанот на пресликувањето:

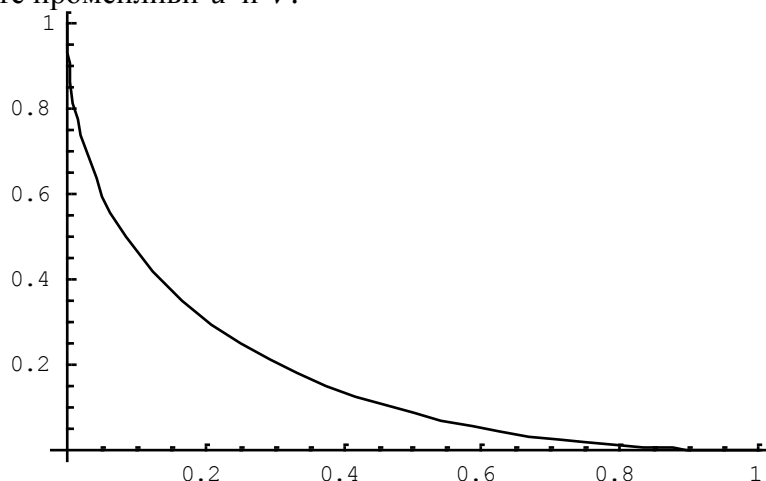
$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \cos^4 v & -4u \cos^3 v \sin v \\ \sin^4 v & 4u \sin^3 v \cos v \end{vmatrix} = 4u \sin^3 v \cos^3 v$$

откаде добиваме:

$$I = 4 \iint_{D'} f(u \cos^4 v, u \sin^4 v) |u| |\sin^3 v| |\cos^3 v| du dv$$

каде D' е новата област за интегрирање.

За да направиме премин од двоен кон повторен интеграл останува да ги најдеме границите на новите променливи u и v .



Пример на ∂D за $a=1$.

Да забележиме дека при даденото пресликување работ на областа ∂D зададен со равенката ∂D : $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $a > 0$ се пресликува во дел од правата $u = a$. Понатаму произволна точка $(0, y)$, $0 < y \leq a$, од y -оската се пресликува на правата $v = \frac{\pi}{2}$.

Слично, произволна точка од x -оската со координати $(x, 0)$, $0 < x \leq a$ се пресликува на правата $v = 0$. Уште да забележиме дека точката од координатниот почеток $(0, 0)$ се пресликува на правата $u = 0$.

Оттука оправдано е равенството:

$$I = 4 \int_0^a u du \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u \cos^4 v, u \sin^4 v) \sin^3 v \cos^3 v dv$$

Во продолжение ќе разгледаме и неколку примери за примена на теоремата за смена на променливи кај двоен интеграл во геометрија:

Пример. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ограничен со кривите:

$$x^2 = ay, x^2 = by, x^3 = cy^2, x^3 = dy^2, (0 < a < b, 0 < c < d)$$

Решение: Од равенките на работ ∂D , заклучуваме дека областа D лежи во првиот квадрант. Во двојниот интеграл:

$$P(D) = \iint_D dx dy$$

воведуваме смена со равенките:

$$x^2 = uy, \quad x^3 = vy^2$$

па добиваме: $a \leq u \leq b$, $c \leq v \leq d$, $x = u^2 v^{-1}$, $y = u^3 v^{-2}$, откаде за Јакобијанот имаме:

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = u^4 v^{-4}$$

Следува дека:

$$P(D) = \iint_{\substack{a \leq u \leq b \\ c \leq v \leq d}} u^4 v^{-4} du dv = \int_a^b u^4 du \int_c^d v^{-4} dv = \frac{1}{15} (b^5 - a^5) (c^{-3} - d^{-3})$$

Пример. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ограничен со кривите:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \quad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 4, \quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \quad 8\frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \quad x > 0, y > 0.$$

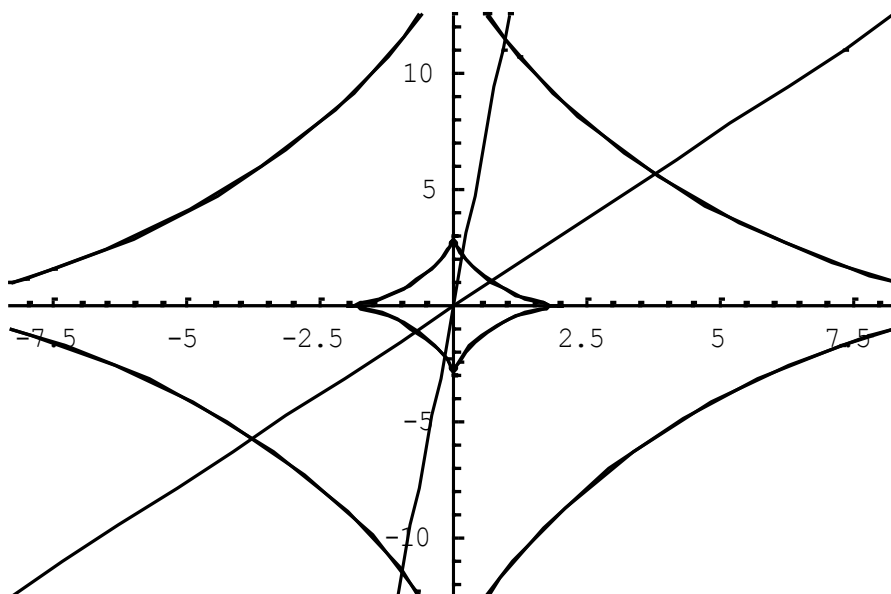
Решение: Во двојниот интеграл $P(D) = \iint_D dx dy$ воведуваме смена со релациите:

$$x = ar \cos^3 t, \quad y = br \sin^3 t.$$

Го пресметуваме Јакобијанот на смената:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = 3abr \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi,$$

каде $1 \leq r \leq 8$, $\arctg 1 \leq \varphi \leq \arctg 2$. Оттука за интегралот добиваме:



Пример за ∂D за $a = 2$, $b = 3$

$$\begin{aligned}
 P(D) &= 3ab \int_{\arctg 1}^{\arctg 2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \int_1^8 r dr = \frac{189}{2} ab \int_{\arctg 1}^{\arctg 2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \\
 &= \frac{189}{8} ab \int_{\arctg 1}^{\arctg 2} \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{189}{16} ab \int_{\arctg 1}^{\arctg 2} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi
 \end{aligned}$$

Следува дека $P(D) = \frac{189}{16} ab \left(\arctg \frac{1}{3} + \frac{6}{25} \right).$