

ПРЕДАВАЊЕ 14

(Летен семестар 20/21: 07.04.2021)

„Неправи интегралите што зависат од параметар“

Ќе ги разгледаме параметарските интегралите во облик:

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (1)$$

што се неправи (несвојствени) со сингуларитет во точката b . Ова значи дека $b = +\infty$ или b е конечно, но функцијата $f(x, y)$ е неограничена во околина на точката $x = b$. Случаите кога сингуларитетот е долна граница или се наоѓа во внатрешноста на интервалот за интеграција се дискутираат аналогно. Потсети се дека интегралот (1) конвергира за некое $y \in \mathbb{R}$ ако за таа вредност на параметарот постои конечна гранична вредност $\lim_{\beta \rightarrow b} F(\beta, y)$, каде:

$$F(\beta, y) = \int_a^\beta f(x, y) dx$$

Во продолжение ќе го воведеме важниот поим за рамномерна конвергенција на неправ параметарски интеграл:

Дефиниција. За интегралот (1) велиме дека рамномерно конвергира по $y \in Y$, каде $Y \subseteq \mathbb{R}$, ако за произволно $\varepsilon > 0$ постои $\beta_0 \in [a, b)$ такво што за секое $y \in Y$ и секое β , $\beta_0 < \beta < b$, важи:

$$\left| I(y) - F(\beta, y) \right| = \left| \int_\beta^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

Пример: Испитај рамномерна конвергенција на следниов интеграл:

$$J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2 + 1}, \quad 0 \leq \alpha < +\infty$$

Решение: Го разгледуваме интегралот:

$$J(B, \alpha) = \int_B^{+\infty} \frac{dx}{(x - \alpha)^2 + 1}$$

Воведуваме смена $x = \alpha + t$ и добиваме $J(B, \alpha) = \int_{B-\alpha}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 1}$ (*). Сега нека $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ е произволно мал. Посебно, правиме избор за $\alpha = B$ во (*) и добиваме $J(B, B) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{\pi}{2} > \varepsilon$, за произволно големо $B > 0$. Следува дека интегралот конвергира нерамномерно на интервалот $[0, \infty)$.

Следнава теорема позната како **Општ принцип на Коши за рамномерна конвергенција (ОПКРК)** ни ги дава потребните и доволните услови за рамномерна конвергенција на неправите параметарски интеграл:

Теорема. Интегралот (1) рамномерно конвергира по $y \in Y \subseteq \mathbb{R}$ ако и само ако за произволно $\varepsilon > 0$ постои $\beta_0 \in [a, b)$ такво што за сите β_1, β_2 за кои $\beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < b$ и за секое $y \in Y$ важи:

$$\left| \int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

Ќе ја наведеме и важната последица од горната теорема позната како **мајорантен критериум на Вајерштрас (МКВ)**:

Последица (МКВ). Нека $\varphi: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ е интеграбилна функција (т.е. постои $\int_a^b \varphi(x) dx$) таква што $|f(x, y)| \leq \varphi(x)$, за сите $x \in [a, b)$, $y \in Y \subseteq \mathbb{R}$. Тогаш интегралот (1) рамномерно конвергира по $y \in Y$.

Доказ: Од конвергентноста на интегралот $\int_a^b \varphi(x) dx$ следува дека за произволно $\varepsilon > 0$ постои $\beta_0 \in [a, b)$ такво што за сите $\beta_1, \beta_2 \in (\beta_0, b)$ важи: $\int_{\beta_1}^{\beta_2} \varphi(x) dx < \varepsilon$. Тогаш за секое $y \in Y$ имаме:

$$\left| \int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x, y) dx \right| \leq \int_{\beta_1}^{\beta_2} |f(x, y)| dx \leq \int_{\beta_1}^{\beta_2} \varphi(x) dx < \varepsilon$$

Сега според **ОПКРК** заклучуваме рамномерна конвергенција на интегралот (1).

Пример: Испитај рамномерна конвергенција на интегралот $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ на интервалот:

$$(i) 1 < \alpha_0 \leq \alpha < +\infty; \quad (ii) 1 < \alpha < +\infty.$$

Решение: (i) Дефинираме функција $F(x) = \frac{1}{x^{\alpha_0}}, x \geq 1$. Да забележиме дека важи следново неравенство:

$$f(x, \alpha) = \frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^{\alpha_0}} = F(x), 1 \leq x < +\infty, 1 < \alpha_0 \leq \alpha < +\infty$$

Ова значи дека $F(x)$ е мајорантна функција за $f(x, \alpha) = \frac{1}{x^\alpha}$. Уште повеќе, важи

$\int_1^{+\infty} F(x) dx < \infty$, т.е. интегралот е конвергентен. Според мајорантниот критериум на Вајерштрас заклучуваме рамномерна конвергенција на разгледуваниот интервал.

(ii) Одбираме произволно $B > 0$. Го пресметуваме интегралот:

$$\int_B^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{B^{1-\alpha}}{\alpha-1} \text{ и } \lim_{\alpha \rightarrow 1^+} \int_B^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 1^+} \frac{B^{1-\alpha}}{\alpha-1} = +\infty$$

Ова значи дека постои $\varepsilon > 0$ така што:

$$\forall B_0, \exists B > B_0 \wedge \exists \alpha \in (1, \infty) \text{ така што } \int_B^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} > \varepsilon$$

Следува дека интегралот конвергира нерамномерно на $1 < \alpha < +\infty$.

Забележи дека со помош на **МКВ** не може да се докаже рамномерна конвергенција на неапсолутно конвергентен интеграл. Во тој случај може да го ползуваме следново тврдење на **Абел-Дирихле (верзија1)**:

Теорема. Докажи дека ако:

(i) Интегралот $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ конвергира рамномерно на (y_1, y_2) ;

(ii) Функцијата φ е ограничена и монотона по x ;

тогаш интегралот $\int_a^{+\infty} f(x, y) \varphi(x, y) dx$ е рамномерно конвергентен на интервалот (y_1, y_2) .

Доказ: Одбираме произволно мало $\varepsilon > 0$. Според првиот услов, ползувајќи го критериумот на Коши, постои $B(\varepsilon)$ такво што за секој $b_1, \theta, b_2 > B(\varepsilon)$ важат следниве неравенства:

$$\left| \int_{b_1}^{\theta} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \left| \int_{\theta}^{b_2} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \forall y \in (y_1, y_2) \quad (*)$$

каде $M = \sup_{x,y} |\varphi(x,y)| \neq 0$ (за $M = 0$ тврдењето е тривијално). Сега со оглед на вториот услов, одиме со втората теорема за средна вредност во интегрално сметање:

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x,y) \varphi(x,y) dx = \varphi(b_1,y) \int_{b_1}^{\theta} f(x,y) dx + \varphi(b_2,y) \int_{\theta}^{b_2} f(x,y) dx,$$

за некое θ , $b_1 \leq \theta \leq b_2$. Оттука ползувајќи ги (*) имаме:

$$\begin{aligned} \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x,y) \varphi(x,y) dx \right| &\leq |\varphi(b_1,y)| \left| \int_{b_1}^{\theta} f(x,y) dx \right| + |\varphi(b_2,y)| \left| \int_{\theta}^{b_2} f(x,y) dx \right| \\ &< M \frac{\varepsilon}{2M} + M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon, \quad \forall y \in (y_1, y_2) \end{aligned}$$

Согласно критериумот на Коши заклучуваме дека интегралот рамномерно конвергира на разгледуваниот интервал.

Забелешка. Доказот на втората теорема за средна вредност во интегралното сметање го има во збирката на Новак Ивановски Решени задачи од Анализа.

Абел-Дирихле (верзија 2)

Теорема. Докажи дека ако:

- (i) Функцијата $\varphi: [a, +\infty) \times (y_1, y_2) \rightarrow \mathbb{R}$ рамномерно конвергира кон 0 кога $x \rightarrow +\infty$, $y \in (y_1, y_2)$ и е монотона по x , $x \in [a, +\infty)$.
- (ii) Интегралот $\int_a^x f(t,y) dt$ е ограничен со константа $M > 0$, за секој $x \in [a, +\infty)$ и за секој $y \in (y_1, y_2)$, т.е.

$$\left| \int_a^x f(t,y) dt \right| < M, \quad \forall x \in [a, +\infty), \forall y \in (y_1, y_2)$$

Тогаш интегралот:

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x,y) f(x,y) dx$$

рамномерно конвергира на интервалот $y_1 < y < y_2$.

Доказ: Одиме со втората теорема за средна вредност во интегрално сметање на интегралот:

$$\begin{aligned} \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x,y) \varphi(x,y) dx \right| &= \left| \varphi(b_1,y) \int_{b_1}^{\theta} f(x,y) dx + \varphi(b_2,y) \int_{\theta}^{b_2} f(x,y) dx \right| \leq \\ &\leq 2M |\varphi(b_1,y)| + 2M |\varphi(b_2,y)|, \quad b_1, \theta, b_2 \in [a, +\infty) \end{aligned}$$

Сега од рамномерната конвергентност на φ кон нулата кога $x \rightarrow +\infty$ по параметарот $y \in (y_1, y_2)$ имаме дека за секое $\varepsilon > 0$, постои $B(\varepsilon)$ т.ш.

$$|\varphi(b_1, y)| < \frac{\varepsilon}{4M} \quad \text{и} \quad |\varphi(b_2, y)| < \frac{\varepsilon}{4M}, \quad \forall y \in (y_1, y_2)$$

за $b_1, b_2 > B(\varepsilon)$. Следува дека за секое $\varepsilon > 0$, постои $B(\varepsilon)$ т.ш.

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) \varphi(x, y) dx \right| < \varepsilon, \quad \forall y \in (y_1, y_2)$$

за $b_1, b_2 > B(\varepsilon)$. Според критериумот на Коши заклучуваме дека интегралот рамномерно конвергира на разгледуваниот интервал.

Пример. Испитај рамномерна конвергенција на интегралот:

$$J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx, \quad 0 \leq \alpha < +\infty$$

Решение: Ги разгледуваме функциите:

$$f(x, \alpha) = \frac{\sin x}{x}, \quad \text{односно} \quad \varphi(x, \alpha) = e^{-\alpha x}$$

Да забележиме дека интегралот $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ конвергира според Дирихле, па оттука

следува и рамномерна конвергенција со оглед на тоа што не зависи од параметар.

Од друга страна функцијата $\varphi(x, \alpha) = e^{-\alpha x}$ е монотона по променливата

x ($\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\alpha e^{-\alpha x} \leq 0$) и ограничена со единица. Според претходната теорема на **Абел-Дирихле (верзија 1)** заклучуваме рамномерна конвергенција.

Непрекинатост на неправ параметарски интеграл

Следнава теорема ни дава доволни услови за граничен премин под знакот на неправ параметарски интеграл:

Теорема. Нека $f : [a, +\infty) \times I(y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ е реална функција, каде $I(y_0)$ е интервал што ја содржи точката $y_0 \in \mathbb{R}$. Докажи дека ако:

(i) Функцијата $f(x, y)$ рамномерно конвергира кон $f(x, y_0)$ на секој интервал $[a, b]$, каде $b > a$ е произволно голем реален број.

(ii) Постои мајорантна функција $F : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $|f(x, y)| \leq F(x)$, $\forall x \in [a, \infty)$ со особина неправиот интеграл да конвергира, т.е. $\int_a^{+\infty} F(x) dx < \infty$.

тогаш важи: $\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx$.

Доказ: Ќе ја разгледаме разликата: $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^{+\infty} f(x, y_0) dx$

Ја запишуваме во следниов облик:

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^{+\infty} f(x, y_0) dx &= \int_a^b (f(x, y) - f(x, y_0)) dx + \\ &+ \int_b^{+\infty} f(x, y) dx - \int_b^{+\infty} f(x, y_0) dx \end{aligned}$$

каде $b > a$ е произволно голем реален број.

Сега одбираме произволно $\varepsilon > 0$. Според условот (ii) за доволно големо $b > a$ важат следниве оценки:

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x, y) dx \right| \leq \int_b^{+\infty} F(x) dx < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| \int_b^{+\infty} f(x, y_0) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

а според условот (i) оценката:

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}, \quad \forall x \in [a, b]$$

за доволно мала разлика $|y - y_0|$.

Следува дека:

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^{+\infty} f(x, y_0) dx \right| < \varepsilon$$

за доволно мала разлика $|y - y_0|$.

Диференцирање на неправ параметарски интеграл

Следнава теорема ни дава доволни услови околу можноста за ползување на **Лајбницовото правило** за диференцирање на неправи параметарски интеграл.

Теорема. Нека се исполнети следниве услови:

- 1) Функцијата $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекината по променливата $x \in [a, b]$ за секое $y \in [c, d]$, додека функцијата $\frac{\partial f}{\partial y}$ е непрекината на $[a, b] \times [c, d]$;
- 2) Интегралот $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ конвергира за некое $y = y_0 \in [c, d]$;
- 3) Интегралот $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$ е рамномерно конвергентен на $[c, d]$.

Тогаш функцијата $I(y)$ е диференцијабилна на $[c, d]$ и важи:

$$I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx \quad (2)$$

Доказ: Како и обично означуваме :

$$F(\beta, y) = \int_a^\beta f(x, y) dx,$$

каде $a < \beta < b$. Сега според условот 1) може да го ползуваме Лајбницовото правило за диференцирање на прави интеграл, па заклучуваме дека F има парцијален извод по y на сегментот $[c, d]$ и важи:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\beta, y) = \int_a^\beta \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$$

Од условот 3) во теоремата имаме дека функцијата $\frac{\partial F}{\partial y}(\beta, y)$ рамномерно конвергира

кон $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$, кога $\beta \rightarrow b$ на $[c, d]$. Уште повеќе од условот 2) заклучуваме дека

функцијата $F(\beta, y)$ за некое $y = y_0$ има гранична вредност кога $\beta \rightarrow b$.

Ова значи дека се исполнети условите за диференцијабилност на гранична функција од фамилија на диференцијабилни функции (теорема од Анализа 1), па оттука

заклучуваме дека $F(\beta, y)$ рамномерно конвергира кон $\int_a^b f(x, y) dx$, кога $\beta \rightarrow b$ на

$[c, d]$ и уште повеќе важи релацијата (2). Доказот е комплетиран.

Пример. Ползувајќи го интегралот $I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx$, каде $\alpha \geq 0, \beta \in \mathbb{R}$,

пресметај го интегралот на Дирихле $D(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx$.

Решение: Подинтегралната функција $f(x, \alpha)$ ја продолжуваме по непрекинатост со:

$$f(x, \alpha) = \begin{cases} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x}, & x \neq 0 \\ \beta, & x = 0 \end{cases}$$

на областа $0 \leq x < +\infty, \alpha \geq 0$. Да забележиме дека интегралот $\int_0^{+\infty} f(x, \alpha) dx$ рамномерно конвергира за $\alpha \geq 0$ според задача 12 (од збирката глава 7), па следува дека $I(\alpha, \beta)$ е непрекината функција по α на интервалот $\alpha \in [0, +\infty)$. Ова значи дека:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I(\alpha, \beta) = I(0, \beta) = D(\beta)$$

Нека $\alpha > 0$ го фиксираме. Подинтегралната функција $f(x, \alpha)$ сега ќе ја гледаме како параметарска функција по параметарот β , т.е.

$$f(x, \alpha) \equiv f(x, \alpha, \beta) \equiv f(x, \beta)$$

Го пресметуваме $\frac{\partial f}{\partial \beta}(x, \beta) = e^{-\alpha x} \cos \beta x$. Да забележиме дека $\frac{\partial f}{\partial \beta}(x, \beta)$ е непрекината функција на областа $0 \leq x < +\infty, \beta \in \mathbb{R}$, а интегралот:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \beta}(x, \beta) dx$$

е рамномерно конвергентен по $\beta \in \mathbb{R}$ според мајорантниот критериум на Вајерштрас: $|e^{-\alpha x} \cos \beta x| \leq e^{-\alpha x}, \forall \beta \in \mathbb{R}$. Следува дека диференцирање по параметарот β во знакот на интегралот е дозволена операција. Оттука имаме дека:

$$\frac{\partial I}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \beta}(x, \beta) dx = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x dx$$

откаде со парцијална интеграција добиваме:

$$\frac{\partial I}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \alpha > 0$$

Последнава релација ја интегрираме по β , па имаме:

$$I(\alpha, \beta) = \arctg \frac{\beta}{\alpha} + C(\alpha)$$

Да забележиме дека $I(\alpha, 0) = 0$, па заклучуваме дека $C(\alpha) = 0$.

Конечно за интегралот на Дирихле добиваме:

$$D(\beta) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I(\alpha, \beta) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \arctg \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \beta$$

Забелешка. Теоремите за интегрирање на неправи параметарски интеграл ги има во збирката стр 186. Разгледајте ги само тврдењата. Докажете одат слично на теоремите за диференцирање само во обратна насока.