

ПРЕДАВАЊЕ 15

(Летен семестар 20/21: 13.04.2021)

„Двојни интеграли“

Нека $P = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ е даден правоаголник во рамнината. Поделба Π на правоаголникот P е пар од конечни низи:

$$\begin{aligned}a &= x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \\c &= y_0 < y_1 < \dots < y_n = d\end{aligned}$$

Дијаметар на поделбата Π е:

$$d(\Pi) = \max \{x_i - x_{i-1}, y_i - y_{i-1} \mid 1 \leq i \leq n\}$$

Претпоставуваме дека е дадена реална функција $f: P \rightarrow \mathbb{R}$. Одбираме произволна точка $c_{ij} \in P_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$.

Дефиниција. За сумата

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(c_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

велиме дека е Риманова сума.

Во продолжение ќе ја ползуваме кратката ознака:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad \text{и} \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1}$$

Дефиниција. За функцијата $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ велиме дека е интегрибилна на правоаголникот P , со вредност на интегралот $I \in \mathbb{R}$, ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков што за секоја поделба Π со дијаметар на поделбата $d(\Pi) < \delta$ имаме дека:

$$|I - S| < \varepsilon,$$

каде S е произволна Риманова сума придружена на поделбата Π .
Пишуваме

$$\iint_P f(x, y) dx dy = I,$$

за интегрибилна функција f со вредност на интегралот I .

За интегрирање над области различни од правоаголник ќе ползуваме мал трик. Претпоставуваме дека D е ограничено подмножество од рамнината. Тогаш постои правоаголник P што во потполност го содржи D .

Дефиниција. Индикаторска функција за $D \subseteq P$ е функцијата

$$i_D : P \rightarrow \mathbb{R}$$

определена со:

$$i_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases}$$

Ако i_D е интегрибилна на P тогаш велиме дека плоштината на D е интегралот:

$$\iint_P i_D dx dy$$

Ако i_D не е интегрибилна тогаш велиме дека D нема плоштина.

Забелешка. Постои теорија на мери според која на определена класа од множества се доделува на строго определен начин реален број што велиме дека е мера на тоа множество. Не сите множества се мерливи. На пример во теоријата на Жорданова мера постојат подмножества од рамнината $\mathbb{R}^2$ што не се Жордан мерливи. За нив уште се вели дека немаат плоштина.

Пример. Нека го разгледаме множеството:

$$D = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$$

Забележи дека функцијата i_D не е интегрибилна. Ова значи дека множеството D нема плоштина. (види пример 3 подолу)

Дефиниција. Нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ е дадена функција, каде $D \subseteq \mathbb{R}^2$ е ограничено подмножество од рамнината. Понатаму, нека P е правоаголник што во потполност го содржи D . Дефинираме:

$$f : P \rightarrow \mathbb{R}$$

со следнава релација:

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases}$$

велиме дека f е интегрибилна над множеството D ако f е интегрибилна над правоаголникот P . Во овој случај имаме:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_P f(x, y) dx dy$$

Теорема. Нека $P \subseteq \mathbb{R}^2$ е даден правоаголник и нека $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекината функција. Тогаш f е интегрибилна.

Забелешка. Доказот е аналоген на теоремата за интегрибилност на функција од една променлива.

Во продолжение ќе ги воведеме долната и горната сума на Дарбу што ќе ни овозможат карактеризација на интегрибилноста на функција од повеќе променливи. Вообичаено работиме во $\mathbb{R}^2$, но поимите и тврдењата имаат природно анаогна форма во $\mathbb{R}^n$.

Нека $P \subseteq \mathbb{R}^2$ е даден правоаголник и нека $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ е дадена ограничена функција. Нека Π е дадена поделба на P и претпоставуваме дека имаме n -потправоаголници. Со P_i го означуваме i -от потправоаголник од поделбата Π . Дефинираме:

$$m_i = \inf \{ f(x) \mid x \in P_i \} \text{ односно } M_i = \sup \{ f(x) \mid x \in P_i \}$$

Ги придружуваме сумите:

$$\underline{s}(\Pi, f) = \sum_{i=1}^n m_i J(P_i) \text{ односно } \bar{S}(\Pi, f) = \sum_{i=1}^n M_i J(P_i)$$

каде $J(P_i)$ е Жорданова мера на потправоаголникот P_i (всушност она што го знаете како плоштина). Ги нарекуваме горна и долна сума на Дарбу соодветно. Следнава теорема е аналогна карактеризација за интегрибилност на случајот со една променлива:

Теорема. Нека $P \subseteq \mathbb{R}^2$ е даден правоаголник и нека $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ е дадена ограничена функција. Тогаш f е интегрибилна функција на P ако за секое $\varepsilon > 0$ постои поделба Π на правоаголникот P така што:

$$\bar{S}(\Pi, f) - \underline{s}(\Pi, f) < \varepsilon$$

.

Пример. Пресметај ги сумите на Дарбу за интегралот:

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy,$$

а потоа и интегралот, каде областа на интегрирање е правоаголникот $P = [1, 2] \times [1, 3]$.

Решение: Да забележиме дека подинтегралната функција во I $f(x, y) = x^2 + y^2$ е непрекината, па интегралот постои. Дефинираме поделба π_n за произволно $n \in \mathbb{N}$ на правоаголникот $P = [1, 2] \times [1, 3]$ со:

$$A_{i,j} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + \frac{i}{n} \leq x \leq 1 + \frac{i+1}{n}, 1 + \frac{2j}{n} \leq y \leq 1 + \frac{2(j+1)}{n} \right\}$$

каде $0 \leq i \leq n-1$, $0 \leq j \leq n-1$. Значи одиме со поделба:

$$\pi_n = \{A_{i,j} \mid 0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq n-1\}$$

Ги пресметуваме $f_{\min} = f\left(1 + \frac{i}{n}, 1 + \frac{2j}{n}\right)$ и $f_{\max} = f\left(1 + \frac{i+1}{n}, 1 + \frac{2(j+1)}{n}\right)$ за точките (x, y) од правоаголникот $A_{i,j}$. За долната и горната сума на Дарбу добиваме:

$$\underline{s}_{\pi_n}(f) = \frac{2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(1 + \frac{i}{n}, 1 + \frac{2j}{n}\right) = \frac{40}{3} - \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2}$$

$$\bar{S}_{\pi_n}(f) = \frac{2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(1 + \frac{i+1}{n}, 1 + \frac{2(j+1)}{n}\right) = \frac{40}{3} + \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2}$$

откаде со граничен премин го пресметуваме интегралот:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{s}_{\pi_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_{\pi_n}(f) = 13\frac{1}{3}$$

Пример. Испитај интеграбилност на функцијата:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \vee y \notin \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

на правоаголникот $P = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$.

Решение: Одбираме произволна поделба $\sigma = \{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ на правоаголникот P . Ги воведуваме ознаките:

$$m_\alpha = \inf_{(x,y) \in A_\alpha} \{f(x, y)\} \text{ односно } M_\alpha = \sup_{(x,y) \in A_\alpha} \{f(x, y)\}$$

и ги придружуваме соодветните суми на Дарбу:

$$\underline{s}(f, \sigma) = \sum_{\alpha \in I} m_\alpha J(A_\alpha) \text{ односно } \bar{S}(f, \sigma) = \sum_{\alpha \in I} M_\alpha J(A_\alpha)$$

Да забележиме дека долната сума на Дарбу е:

$$\underline{s}(f, \sigma) = \sum_{\alpha \in I} m_\alpha J(A_\alpha) = 0,$$

додека горната сума на Дарбу е:

$$\bar{S}(f, \sigma) = \sum_{\alpha \in I} M_\alpha J(A_\alpha) = J(P) = ab$$

што следува директно од дефиницијата на f .

Оттука добиваме дека за произволна поделба σ на P важи:

$$|\underline{S}(f, \sigma) - \underline{s}(f, \sigma)| = ab$$

Според теоремата за карактеризација на интеграбилност на функции од горниот параграф заклучуваме дека функцијата не е интеграбилна на P .

Ги наведуваме и основните својства на двојниот интеграл. Доказот е прилично едноставен ползувајќи ја дефиницијата за двоен интеграл.

Теорема. Нека f и g се интеграбилни функции на ограничено множество $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Тогаш важат следниве тврдења:

- 1) $\iint_D (f + g) dx dy = \iint_D f dx dy + \iint_D g dx dy$;
- 2) $\iint_D c f dx dy = c \iint_D f dx dy$, за произволен скалар $c \in \mathbb{R}$;
- 3) Ако $f(x, y) \leq g(x, y)$ за произволно $(x, y) \in D$ тогаш $\iint_D f dx dy \leq \iint_D g dx dy$.