

ПРЕДАВАЊЕ 12

(Летен семестар 20/21: 31.03.2021)

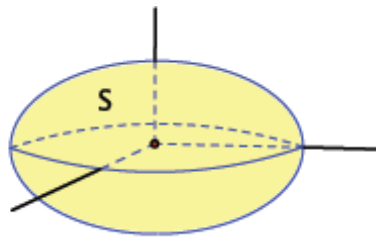
„Условни екстремуми-Множители на Лагранж“

Ќе го разгледаме проблемот на максимизација или минимизација на дадена функција што е податна на дополнителни услови. На пример, доколку се обидуваме да ја пресметаме максималната вредност на функцијата $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ би биле малку наивни со оглед на тоа што функцијата може да надмине било која вредност доколку се оддалечиме од координатниот почеток доволно далеку. Но доколку (x, y, z) се ограничени во даден дел од просторот тогаш имаме за што да размислуваме. Ќе го илустрираме ова на следниов:

Пример: Нека е дадена површина S определена со равенката:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1, \text{ за } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Забележи дека станува збор за елипсоид како што е прикажано на сликата подолу.



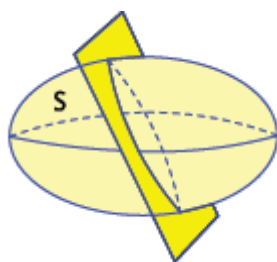
Елипсоид $S: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$

Ако повторно ја разгледаме функцијата $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ сега може да го поставиме прашањето: „Во кои точки од површината S функцијата f го достигнува својот минимум и максимум“?

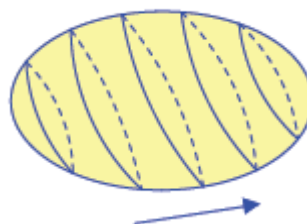
Еден пристап би бил да го конвертираме ова во проблем на функција со две променливи преку следниов експлицитен запис на $z = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$. Со замена на последнава релација во f добиваме функција од две променливи (всушност две, една за знакот $+$ и една за знакот $-$) на која можеме да продолжиме со испитување на стационарните точки според предавањето 11.

Наместо тоа, во ова предавање 12 ќе се обидеме со малку поинаков пристап. Имено ќе ги разгледаме множествата на соодветно ниво c за функцијата f , т.е. множествата определени со: $f = x + 2y + 3z = c$. Забележи дека станува збор за рамнини што ја пресекуваат површината S во криви (ако воопшто ја пресекуваат). Со менување на параметарот c добиваме фамилија од криви на соодветно ниво за функцијата f на површината S , на кои f е константа, имено $f = c$.

Да речеме дека сакаме да го максимизираме f на површината S . Тогаш почнувајќи од некоја точка се движиме по S во насока на зголемување на параметарот c . Продолжуваме со ова се додека не стигнеме до точка a од каде неможе да продолжиме понатаму. Нека со $c_{\max}$ ја означиме вредноста на функцијата f во точката a . Забележи дека во точката a :



$$f = x + 2y + 3z = c$$



насока на зголемување на c

Слика 1: Пресек на S со површина на соодветно ниво $f = c$ (лево) и фамилија од пресеци (десно)

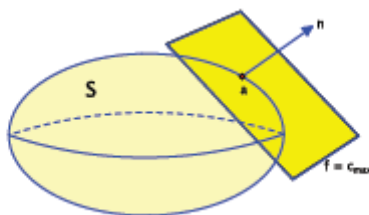
1) Множеството на соодветно ниво $f = c_{\max}$ треба да биде тангентно на површината S . Во спротивно, ќе можеме да ја поминеме кривата на соодветно ниво во точката a и да ја зголемиме вредноста на f притоа останувајќи во S .

2) $\nabla f(a)$ е нормален вектор на множеството на соодветно ниво $f = c_{\max}$. Ова е така затоа што градиентите се секогаш нормални на множествата на соодветно ниво.

3) Слично, површината S е множество на соодветно ниво за функцијата g , имено множеството каде:

$$g(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$$

Ова значи дека $\nabla g(a)$ е нормален на површината S . Ситуацијата е прикажана на следнава слика 2:



Слика 2: Множеството на соодветно ниво $f = c_{\max}$ и површината S се тангентни во точката a .

Сега од тоа што множеството на соодветно ниво $f = c_{\max}$ и површината S се тангентни во точката a заклучуваме дека нивните нормални вектори се до скаларен множител еднакви меѓу себе (т.е. се колинеарни). Ова е главната идеја на следниов генерален принцип на Лагранж:

Пропозиција. (Метод на Лагранжови множители) Нека $U \subseteq \mathbb{R}^n$ е отворено множество и претпоставуваме дека сакаме да оптимизираме глатка функција $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ што е подложна на условот $g(x) = c$, за некоја глатка функција $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ и константа c . Ако f има локален минимум или локален максимум во точката a и ако $\nabla g(a) \neq 0$ тогаш постои скалар $\lambda \in \mathbb{R}$ така што:

$$\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$$

Скаларот $\lambda \in \mathbb{R}$ се нарекува множител на Лагранж.

Се враќаме на разгледуваниот пример. Според принципот на Лагранж решението се појавува во точки во кои $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$, односно во нашиот случај:

$$(1, 2, 3) = \lambda \left(\frac{x}{2}, \frac{2}{9}y, 2z \right)$$

Оттука добиваме дека $x = \frac{2}{\lambda}$, $y = \frac{9}{\lambda}$, $z = \frac{3}{2\lambda}$. Со директна замена во равенката на елипсоидот добиваме: $\lambda = \pm \frac{7}{2}$ откаде ги добиваме соодветните точки во кои функцијата го достигнува својот максимум 7 односно минимум -7. Тоа се точките $\left(\frac{4}{7}, \frac{18}{7}, \frac{3}{7} \right)$ односно $\left(-\frac{4}{7}, -\frac{18}{7}, -\frac{3}{7} \right)$ соодветно.

Пример. Испитај ги условните екстреми на функцијата:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \text{ при услов } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, (a > b > c > 0).$$

Решение: Ја составуваме функцијата на Лагранж:

$$\Phi(x, y, z; \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$$

Ги определуваме стационарните точки од системот:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2y + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 2z + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Решенијата се: за $\lambda_{1,2} = -c^2$, $M_{1,2}(0, 0, \pm c)$; за $\lambda_{3,4} = -a^2$, $M_{3,4}(\pm a, 0, 0)$; за $\lambda_{5,6} = -b^2$, $M_{5,6}(0, \pm b, 0)$.

За проверка на доволните услови го пресметуваме диференцијалот од втор ред:

$$d^2\Phi = 2\left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right)dx^2 + 2\left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right)dy^2 + 2\left(1 + \frac{\lambda}{c^2}\right)dz^2$$

Од неравенствата:

$$d^2\Phi(M_{1,2}, \lambda_{1,2}) = 2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)dx^2 + 2\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)dy^2 > 0$$

односно:

$$d^2\Phi(M_{3,4}, \lambda_{3,4}) = 2\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)dy^2 + 2\left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right)dz^2 < 0$$

следува дека во точките $M_{1,2}(0, 0, \pm c)$ функцијата го достигнува својот минимум ($f_{\min} = c^2$), а во точките $M_{3,4}(\pm a, 0, 0)$ својот максимум ($f_{\max} = a^2$). Останува да ги испитае точките $M_{5,6}(0, \pm b, 0)$:

Да забележиме дека во точките $M_{5,6}(0, \pm b, 0)$, при $dx = 0$, $dz \neq 0$:

$$d^2\Phi(M_{5,6}, \lambda_{5,6}) = 2\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right)dz^2 < 0$$

додека при $dx \neq 0$, $dz = 0$:

$$d^2\Phi(M_{5,6}, \lambda_{5,6}) = 2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)dx^2 > 0$$

па со оглед на тоа што диференцијалот го менува знакот во овие точки функцијата не достигнува екстрем.

Забелешка. Множеството $D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$ е компактно па од непрекинатоста на f и од теоремата на Вајерштрас функцијата го достигнува својот минимум и максимум на D . Ова значи дека локалните екстреми се и глобални на D во примеров.

Забелешка. Во збирката имате убави примери што го илустрираат методот на множители на Лагранж. Разгледајте барем некој од нив!