

ПРЕДАВАЊЕ 20

(Летен семестар 20/21: 28.04.2021)

„Тројни интеграли-примена во геометрија“

Интегрирањето на реални функции од три или повеќе променливи концептуално е идентично со двојните интеграли. Ознаките само се посложени. Ќе ја споменеме само аналогната дефиниција на троен интеграл:

Нека $P = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \subseteq \mathbb{R}^3$ е даден правоаголен паралелопипед во просторот. Поделба Π на P е тројка од конечни низи:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$$

$$e = z_0 < z_1 < \dots < z_n = f$$

Дијаметар на поделбата Π е:

$$d(\Pi) = \max \{x_i - x_{i-1}, y_i - y_{i-1}, z_i - z_{i-1} \mid 1 \leq i \leq n\}$$

Претпоставуваме дека е дадена реална функција $f: P \rightarrow \mathbb{R}$. Одбираме произволна точка $c_{ijk} \in P_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$.

Дефиниција. За сумата

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(c_{ijk})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$$

велиме дека е Риманова сума.

Дефиниција. За функцијата $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ велиме дека е интегрибилна на правоаголниот паралелопипед P , со вредност на интегралот $I \in \mathbb{R}$, ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков што за секоја поделба Π со дијаметар на поделбата $d(\Pi) < \delta$ имаме дека:

$$|I - S| < \varepsilon,$$

каде S е произволна Риманова сума придружена на поделбата Π .
Пишуваме

$$\iiint_P f(x, y, z) dx dy dz = I,$$

за интеграбилна функција f со вредност на интегралот I .

За интегрирање над области различни од правоаголен паралелопипед ќе ползуваме мал трик. Претпоставуваме дека D е ограничено подмножество од просторот. Тогаш постои правоаголен паралелопипед P што во потполност го содржи D .

Дефиниција. Индикаторска функција за $D \subseteq P$ е функцијата

$$i_D : P \rightarrow \mathbb{R}$$

определена со:

$$i_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases}$$

Ако i_D е интеграбилна на P тогаш велиме дека волуменот на D е интегралот:

$$\iiint_P i_D dx dy dz$$

Ако i_D не е интеграбилна тогаш велиме дека D нема волумен.

Дефиниција. Нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ е дадена функција, каде $D \subseteq \mathbb{R}^3$ е ограничено подмножество од просторот. Понатаму, нека P е правоаголен паралелопипед што во потполност го содржи D . Дефинираме:

$$f : P \rightarrow \mathbb{R}$$

со следнава релација:

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases}$$

велиме дека f е интеграбилна над множеството D ако f е интеграбилна над правоаголниот паралелопипед P . Во овој случај имаме:

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_P f(x, y, z) dx dy dz$$

Забелешка. Забележи дека важат аналогни теореми како оние за двојните интегралите.

Во продолжение ќе разгледаме неколку примери што ја илустрираат примената на овие интегралите во геометријата.

Пример. Пресметај го волуменот на телото T ограничено со површините зададени со равенките:

$$z = x^2 + y^2, z = 2x^2 + 2y^2, y = x, y = x^2$$

Решение: Телото T чии што волумен сакаме да го пресметаме може да го запишеме како множество точки во следниов облик:

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x, x^2 + y^2 \leq z \leq 2(x^2 + y^2)\}$$

Според релацијата од претходната дискусија имаме:

$$V(T) = \iiint_T dx dy dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2 + y^2) dy$$

откаде за бараниот волумен добиваме $V(T) = \frac{3}{35}$.

Пример. Пресметај волумен на тело ограничено со површини зададени со равенките:

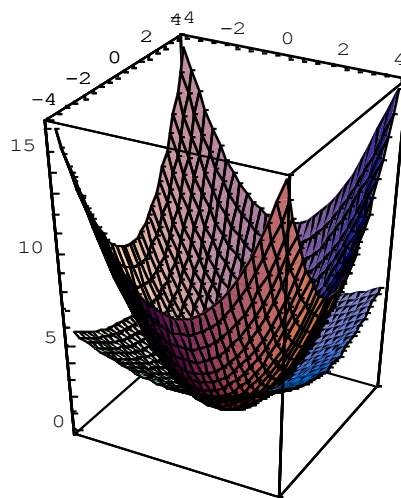
$$az = x^2 + y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}, a > 0.$$

Решение: Да забележиме дека телото T е ограничено со параболоид и конусна површина чии пресек е крива што во xOy -рамнината се проектира во кружница γ со равенка: $x^2 + y^2 = a^2$. Сега множеството T го добива обликот

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -a \leq x \leq a, -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}, \frac{x^2 + y^2}{a} \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

Во тројниот интеграл $V(T) = \iiint_T dx dy dz$ воведуваме цилиндрична смена со равенките:

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z \text{ и } \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = r \text{ откаде добиваме:}$$



Пример на површините за $a = 2$

$$V(T) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r dr \int_{\frac{r^2}{a}}^r dz = 2\pi \int_0^a \left(r^2 - \frac{r^2}{a} \right) dr = \frac{a^3 \pi}{6}$$

при што ползувавме симетрија на телото во однос на рамнините xOz и yOz .

Пример. Пресметај волумен на дел од просторот ограничен со површината зададена со равенката:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x}{h}, a > 0, b > 0, c > 0, h > 0.$$

Решение: Одиме со пресметка на тројниот интеграл $V(T) = \iiint_T dx dy dz$. Воведуваме смена со обопштени сферни координати:

$$x = ar \cos \varphi \sin \theta, y = br \sin \varphi \sin \theta, z = cr \cos \theta$$

Јакобијанот на смената со обопштени сферни координати откако ќе го пресметаме добиваме:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = abcr^2 \sin \theta$$

Да забележиме дека границите на новите променливи се:

$$0 \leq \theta \leq \pi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \text{ и } 0 \leq r \leq \sqrt[3]{\frac{a \sin \theta \cos \varphi}{h}}$$

при што ползувавме дека $x > 0$. Оттука за интегралот добиваме:

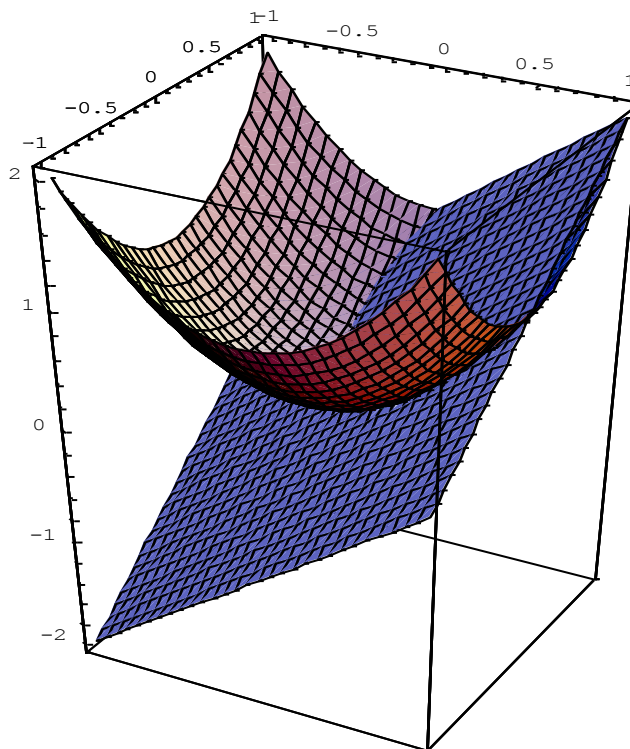
$$\begin{aligned} V &= \iiint_T dx dy dz = abc \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt[3]{\frac{a \sin \theta \cos \varphi}{h}}} r^2 dr = \\ &= \frac{a^2 bc}{3h} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = \frac{\pi a^2 bc}{3h} \end{aligned}$$

Пример. Пресметај го волуменот на делот од просторот T ограничен со површините:

$$z = x^2 + y^2, z = x + y$$

Решение: Да забележиме дека параболоидот и рамнината се сечат во крива γ чија проекција на xOy рамнината има равенка:

$$\gamma_{xOy} : \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}$$



Пресек на параболоидот и рамнината

Оттука телото T може да го запишеме како множество на точки со:

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}, x^2 + y^2 \leq z \leq x + y \right\}$$

Следува дека за волуменот на T имаме:

$$V = \iint_D (x + y - x^2 - y^2) dx dy,$$

$$\text{каде } D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Воведуваме смена во двојниот интеграл со релациите:

$$x - \frac{1}{2} = r \cos \varphi, y - \frac{1}{2} = r \sin \varphi$$

откаде за интегралот добиваме:

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{r}{2} - r^3 \right) dr = \frac{\pi}{8}.$$