

ПРЕДАВАЊЕ 4

(Летен семестар 20/21: 03.03.2021)

„Малку повеќе околу диференцирањето на функции од повеќе променливи“

Во овој дел ќе вклучиме неколку важни теореми околу диференцијабилноста на функции од повеќе променливи. Главниот резултат е следнава:

Теорема. Нека $A \subseteq \mathbb{R}^n$ е отворено подмножество и нека $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ е векторско вредносна функција. Ако парцијалните изводи $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $j = \overline{1, n}; i = \overline{1, m}$ постојат и се непрекинати на A тогаш функцијата f е диференцијабилна на ова множество.

Доказ: Ќе ја ползуваме теоремата за средна вредност кај реални функции од една променлива. Имено, важи следнава:

Теорема за средна вредност: Нека $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекината и диференцијабилна функција во секоја точка од (a, b) . Тогаш постои $c \in (a, b)$ таков што:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Ќе претпоставиме дека $m=1$ и $n=2$. Доказот на општиот случај е аналоген на овој што ќе го презентираме, само што ознаките тогаш ќе бидат повеќе вклучени. Значи имаме реална функција $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Нека $P = (a, b)$ и нека $\overrightarrow{PQ} = h_1 \vec{i} + h_2 \vec{j}$. Нека:

$$P_0 = P = (a, b), \quad P_1 = (a + h_1, b) \quad \text{и} \quad P_2 = (a + h_1, b + h_2) = Q.$$

Сега имаме дека:

$$f(Q) - f(P) = (f(P_2) - f(P_1)) + (f(P_1) - f(P_0)). \quad (*)$$

Во релацијата (*) ќе ја употребиме теоремата за средна вредност двапати, па добиваме:

$$f(P_1) - f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(Q_1)h_1 \quad \text{и} \quad f(P_2) - f(P_1) = \frac{\partial f}{\partial y}(Q_2)h_2,$$

каде Q_1 лежи некаде на сегментот P_0P_1 , додека Q_2 лежи некаде на сегментот P_1P_2 . Ако ги залепиме овие информации заедно добиваме:

$$f(Q) - f(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(Q_1)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(Q_2)h_2$$

Оттука следува дека:

$$\begin{aligned} \frac{|f(Q) - f(P) - A \cdot \overrightarrow{PQ}|}{\|\overrightarrow{PQ}\|} &= \frac{\left| \left(\frac{\partial f}{\partial x}(Q_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(P) \right) h_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(Q_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(P) \right) h_2 \right|}{\|\overrightarrow{PQ}\|} \leq \\ &\leq \frac{\left| \left(\frac{\partial f}{\partial x}(Q_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(P) \right) h_1 \right|}{\|\overrightarrow{PQ}\|} + \frac{\left| \left(\frac{\partial f}{\partial y}(Q_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(P) \right) h_2 \right|}{\|\overrightarrow{PQ}\|} \leq \frac{\left| \left(\frac{\partial f}{\partial x}(Q_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(P) \right) h_1 \right|}{|h_1|} + \\ &+ \frac{\left| \left(\frac{\partial f}{\partial y}(Q_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(P) \right) h_2 \right|}{|h_2|} = \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x}(Q_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(P) \right) \right| + \left| \left(\frac{\partial f}{\partial y}(Q_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(P) \right) \right| \end{aligned}$$

Забележи дека како што точката Q се доближува до точката P , така и точките Q_1 и Q_2 се доближуваат до точката P . Од непрекинатоста на парцијалните изводи следува дека важи следново неравенство:

$$\lim_{Q \rightarrow P} \frac{|f(Q) - f(P) - A \cdot \overrightarrow{PQ}|}{\|\overrightarrow{PQ}\|} \leq \lim_{Q \rightarrow P} \left(\left| \left(\frac{\partial f}{\partial x}(Q_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(P) \right) \right| + \left| \left(\frac{\partial f}{\partial y}(Q_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(P) \right) \right| \right) = 0$$

Ова значи дека функцијата f е диференцијабилна во точката P со извод еднаков на матрицата A .

Пример. Нека е дадена функција $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ определена со:

$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

каде $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Тогаш:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ и слично } \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Забележи дека двата парцијални извода постојат и се непрекинати на множеството A . Ова значи, според претходната теорема, дека функцијата f е диференцијабилна на множеството A и нејзиниот градиент е определен со:

$$\nabla f = \left(\frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Лема. Нека $A = (a_{ij})$ е дадена $m \times n$ матрица. Ако $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ е произволен вектор тогаш:

$$\|A\vec{v}\| \leq K \|\vec{v}\|,$$

$$\text{каде } K = \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Доказ: Нека $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ се вектор редиците на матрицата A . Тогаш на позицијата во i -тата редица на $A\vec{v}$ стои $\vec{a}_i \cdot \vec{v}$. Оттука имаме,

$$\begin{aligned} \|A\vec{v}\|^2 &= (\vec{a}_1 \cdot \vec{v})^2 + (\vec{a}_2 \cdot \vec{v})^2 + \dots + (\vec{a}_n \cdot \vec{v})^2 \leq \\ &\leq \|\vec{a}_1\|^2 \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{a}_2\|^2 \|\vec{v}\|^2 + \dots + \|\vec{a}_n\|^2 \|\vec{v}\|^2 = \\ &= \left(\|\vec{a}_1\|^2 + \|\vec{a}_2\|^2 + \dots + \|\vec{a}_n\|^2 \right) \|\vec{v}\|^2 = \\ &= K^2 \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

Со коренување на двете страни од горното неравенство, заклучокот следува.

Теорема. Нека $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ е дадена векторска функција, каде $A \subseteq \mathbb{R}^n$ е отворено множество. Ако f е диференцијабилна во точка $P \in A$ тогаш f е непрекината во P .

Доказ: Нека f е диференцијабилна во точката P и нека нејзиниот извод во оваа точка е матрицата $Df(P) = B$. Тогаш имаме дека:

$$\lim_{Q \rightarrow P} \frac{f(Q) - f(P) - B \cdot \overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = 0$$

што е еквивалентно на условот:

$$\lim_{Q \rightarrow P} \frac{\|f(Q) - f(P) - B \cdot \overrightarrow{PQ}\|}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = 0$$

Но, ако ова важи тогаш сигурно важи и следниов лимес:

$$\lim_{Q \rightarrow P} \|f(Q) - f(P) - B \cdot \overrightarrow{PQ}\| = 0$$

Оттука имаме дека:

$$\begin{aligned} \|f(Q) - f(P)\| &= \|f(Q) - f(P) - B \cdot \overrightarrow{PQ} + B \cdot \overrightarrow{PQ}\| \leq \\ &\leq \|f(Q) - f(P) - B \cdot \overrightarrow{PQ}\| + \|B \cdot \overrightarrow{PQ}\| \leq \\ &\leq \|f(Q) - f(P) - B \cdot \overrightarrow{PQ}\| + K \|\overrightarrow{PQ}\| \end{aligned}$$

каде K е ненегативниот реален број од претходната лема.

Забележи дека ако побараме лимес кога точката Q се стреми кон точката P тогаш двата члена од десната страна на горното неравенство се стремат кон нула. Ова значи дека важи следниов лимес:

$$\lim_{Q \rightarrow P} \|f(Q) - f(P)\| = 0$$

Непрекинатоста на функцијата f во точката P следува.

Правилата за пресметување на диференцијалот на векторски (или специјално скаларни реални) функции од повеќе променливи во основа се исти како правилата што важат за реални функции од една променлива. Ќе го наведемо прво правилото за линеарност на операцијата диференцирање.

Теорема. Нека $A \subseteq \mathbb{R}^n$ е отворено множество. Понатаму, нека $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $g : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ се дадени векторски функции и нека $P \in A$ е произволна точка. Одбираме произволен скалар $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ако f и g се диференцијабилни функции во точката P тогаш:

(1) $f + g$ е диференцијабилна во точката P и $D(f + g)(P) = D(f)(P) + D(g)(P)$.

(2) λf е диференцијабилна во точката P и $D(\lambda f)(P) = \lambda D(f)(P)$.

Специјално за $m=1$:

(3) fg е диференцијабилна во точката P : $D(fg)(P) = D(f)(P)g(P) + f(P)D(g)(P)$.

(4) Ако $g(P) \neq 0$ тогаш $\frac{f}{g}$ е диференцијабилна во точката P и важи:

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(P) = \frac{D(f)(P)g(P) - f(P)D(g)(P)}{g^2(P)}.$$

Доказ: Ќе го докажеме тврдењето (2). Имено, нека f е диференцијабилна во точката P и нека $\lambda \in \mathbb{R}$ е произволен скалар. Тогаш од претпоставката за диференцијабилност во точката P имаме:

$$\lim_{Q \rightarrow P} \frac{f(Q) - f(P) - \overrightarrow{APQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = 0,$$

каде $A = Df(P)$. Сега за функцијата λf добиваме:

$$\lim_{Q \rightarrow P} \frac{(\lambda f)(Q) - (\lambda f)(P) - (\lambda A)\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \lambda \frac{f(Q) - f(P) - \overrightarrow{APQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = 0$$

па заклучуваме дека $D(\lambda f)(P) = \lambda D(f)(P)$.

Тврдењето (1) се докажува слично. Тврдењата (3) и (4) се аналогни на тврдењата за диференцирање на функции со една променлива и се докажуваат аналогно.