

ПРЕДАВАЊЕ 10

(Летен семестар 20/21: 24.03.2021)

„Имплицитни функции“

Ќе ја разгледаме кривата $y^2 = x$ во рамнината $\mathbb{R}^2$:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x\}$$

Забележи дека ова не е граф на некоја функција, но сепак е навистина „блиску“ до граф на некоја функција.

Имено, нека е дадена произволна точка од C , на пример точката $(4, 2)$. Тогаш секогаш можеме да најдеме отворени интервали, U што ја содржи точката 4, односно V што ја содржи точката 2 и глатка функција $f: U \rightarrow V$ така што $C \cap (U \times V)$ е граф на f .

Навистина, нека $U = (0, \infty)$, $V = (0, \infty)$ и $f(x) = \sqrt{x}$. Всушност ова може да го направиме за секоја точка од C , различна од координатниот почеток. Ако точката е над x -оската, тогаш горниот избор на функција и околина ќе ни заврши работа. Ако пак точката што не интересира е под x -оската тогаш ќе го замениме V со $(-\infty, 0)$, а функцијата $f(x) = \sqrt{x}$ со $g(x) = -\sqrt{x}$.

Како може да знаеме дека координатниот почеток е точка во која локално неможеме да дефинираме имплицитна функција? Геометриската интуиција ни вели дека тангентите на кривата C во точки различни од координатниот почеток не се вертикални. Во координатниот почеток тангентата е вертикална. Поинаку кажано, ако го разгледаме пресликувањето:

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

определено со $F(x, y) = y^2 - x$, забележи дека кривата C е множеството каде функцијата F прима вредност нула. Го пресметуваме изводот на F :

$$DF(x, y) = (-1, 2y)$$

Мала обсервација ни вели дека точките во кои запаѓаме во неволја се оние за кои $2y = 0$. Она што е зачудувачки е што оваа мала обсервација е доволно добра и за општиот (векторски) случај. Ќе го докажеме прво скаларниот:

Теорема. Нека $A \subseteq \mathbb{R}^2$ е отворено множество и нека $(a, b) \in A$. Понатаму, нека:

- (i) $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекината функција;
- (ii) $F(a, b) = 0$;
- (iii) Парцијалниот извод $\frac{\partial F}{\partial y}$ постои и е непрекинат на A ;
- (iv) $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$.

Тогаш постои околина $W = U \times V$ на точката (a, b) , каде $U = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \alpha\}$, а $V = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - b| < \beta\}$, и еднозначно определена непрекината функција $f : U \rightarrow V$ таква што $f(a) = b$ и $F(x, f(x)) = 0$, за секој $x \in U$.

Доказ: Без губење од општоста може да претпоставиме дека $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) > 0$. Од непрекинатоста на функцијата $\frac{\partial F}{\partial y}$ постои околина на точката (a, b) во која $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$. Можеме да одбереме правоаголник $[a - \alpha_1, a + \alpha_1] \times [b - \beta, b + \beta]$ што лежи во внатрешноста на отвореното множество A во улога на споменатата околина. Ја разгледуваме функцијата $F(a, y)$ од една променлива, каде $y \in [b - \beta, b + \beta]$. Сега од тоа што $\frac{\partial F}{\partial y}(a, y) > 0$, заклучуваме дека функцијата е строго растечка. Со оглед на тоа што $F(a, b) = 0$ добиваме дека:

$$F(a, b - \beta) < 0 \quad \text{и} \quad F(a, b + \beta) > 0$$

Од непрекинатоста на функцијата F заклучуваме дека горните релации важат во околина на точката a , па постои реален број $0 < \alpha \leq \alpha_1$ таков што за сите $x \in [a - \alpha, a + \alpha]$ е исполнето:

$$F(x, b - \beta) < 0 < F(x, b + \beta)$$

Сега за произволно фиксирано x од посочениот сегмент ја разгледуваме функцијата $F(x, y)$ како реална функција од променливата y определена на сегментот $[b - \beta, b + \beta]$. Забележи дека функцијата е непрекината, строго растечка функција и прима вредности со различен знак на краевите од тој сегмент. Ова значи дека постои еднозначно определена вредност $y = f(x) \in (b - \beta, b + \beta)$ таква што $F(x, f(x)) = 0$. Од тоа што $F(a, b) = 0$ заклучуваме дека $f(a) = b$. Ќе докажеме дека вака

дефинираната функција $f:U \rightarrow V$, каде $U=(a-\alpha, a+\alpha)$ односно $V=(b-\beta, b+\beta)$ е непрекината. Забележи дека е доволно да докажеме непрекинатост на функцијата f само во точката a . Нека $0 < \varepsilon < \beta$ е произволно одбран. Повторувајќи ја претходната постапка постои $0 < \delta < \alpha$ такво што за секое x такво што $|x-a| < \delta$ постои единствено y такво што $|y-b| < \varepsilon$ и $F(x, y) = 0$. Забележи дека за ваквото y важи дека $y = f(x)$. Но тогаш имаме:

$$|f(x) - f(a)| = |y - b| < \varepsilon, \text{ за сите } |x - a| < \delta$$

што значи дека функцијата f е непрекината во точката a . Доказот е комплетиран.

Ќе ја дополниме претходната теорема за егзистенција на имплицитна функција со пропозиција што дава опис на некои нејзини особини:

Пропозиција: Нека функцијата $F:A \rightarrow \mathbb{R}$ освен што ги исполнува условите од претходната теорема (i)–(iv) го исполнува и условот:

(v) Парцијалниот извод $\frac{\partial F}{\partial x}$ постои и е непрекинат на A .

Тогаш функцијата $f:U \rightarrow V$ од претходната теорема за егзистенција на имплицитна функција е непрекинато диференцијабилна, т.е. $f \in C^1(U)$ и за сите $x \in U$ важи:

$$f'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$$

Уште повеќе ако $F \in C^p(A)$, за некое $p \in \mathbb{N}$ тогаш $f \in C^p(U)$.

Доказ: Нека $x \in U$ и нека $h \in \mathbb{R}$ е такво што $x+h \in U$. Ќе ги ползуваме ознаките од претходната теорема. Понатаму, нека $y = f(x)$ и $f(x+h) - f(x) = k$. Во околината W функцијата F ги задоволува условите за примена на теоремата за средна вредност. Значи постои реален број $0 < \theta < 1$ таков што:

$$F(x+h, y+k) - F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x+\theta h, y+\theta k)h + \frac{\partial F}{\partial y}(x+\theta h, y+\theta k)k$$

Но забележи дека левата страна на горното равенство е нула. Имено важат истовремено релациите:

$$F(x, y) = F(x, f(x)) = 0, \text{ односно } F(x+h, y+k) = F(x+h, f(x+h)) = 0$$

Имајќи во предвид дека $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ во околината W добиваме дека:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{k}{h} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}(x + \theta h, y + \theta k) \quad (*)$$

Забележи дека од непрекинатоста на f во точката x кога $h \rightarrow 0$ тогаш и $k \rightarrow 0$. Сега од непрекинатоста на парцијалните изводи $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ во точката (x, y) со граничен премин кога $h \rightarrow 0$ во горната релација $(*)$ добиваме:

$$f'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$$

имајќи во предвид дека $y = f(x)$. Сега од непрекинатоста на парцијалните изводи во точката (x, y) следува непрекинатоста на f' во точката x . Последниот дел се докажува индуктивно по p .

Пример: Ќе ја разгледаме функцијата $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ дефинирана со:

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

Забележи дека функцијата F е бесконечно диференцијабилна (поседува непрекинати парцијални изводи од произволен ред) и при тоа важи:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y$$

Забележи дека условот $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ е исполнет доколку $2y \neq 0$, т.е. во оние точки од кривата $x^2 + y^2 = 1$, за кои $|x| < 1$. Значи за секоја точка (x, y) од кружницата $x^2 + y^2 = 1$, освен за точките $(1, 0)$ и $(-1, 0)$ постои околина во која е еднозначно определена бесконечно диференцијабилна функција $y = f(x)$ таква што ја задоволува релацијата $F(x, f(x)) = 0$. При тоа важи:

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}(x, y) = -\frac{x}{y}$$

Со ново диференцирање добиваме:

$$f''(x) = -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y + x \frac{x}{y}}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3}$$

Диференцирањето може да продолжи произволно многу пати. Да забележиме дека во овој случај добиените формули можеме да ги провериме и со директно диференцирање на познатиот експлицитен израз за функцијата $f(x)$ во овој случај $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ или $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ во зависност од точката (x, y) , т.е. од знакот на y .

Забелешка. Теоремата за имплицитна функција има природна генерализација за функција $F: A \rightarrow \mathbb{R}$, каде $A \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$, за $m \geq 1$. Формулацијата и доказот е потполно аналоген на теоремата за случајот $m=1$, па затоа нема да го наведеме.

Забелешка. Теоремата за имплицитна функција има природна генерализација за векторска функција $F: A \rightarrow \mathbb{R}^n$, каде $A \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$, $n \geq 1$. Доказот не е потполно аналоген на теоремата за случајот $n=1$, па затоа нема да го наведеме. ☺ ☺