

ПРЕДАВАЊЕ 7

(Летен семестар 21/22: 04.05.2022)

„Криволиниски интеграли“

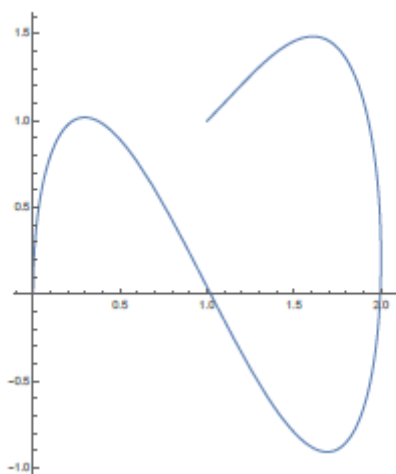
Во последното предавање ги дискутиравме тројните интеграли. Во ова предавање ќе разгледаме нова тема од голема важност како во математиката така и во физиката: „криволиниски интеграли“.

Криволиниски интеграли од прв тип

Нека C е крива во $\mathbb{R}^2$ параметризирана со:

$$r(t) = (x(t), y(t)), \quad a \leq t \leq b$$

На пример кривата $r(t) = (\sin t + 1, e^{-t} + \sin(2t))$, $0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ е прикажана на слика 1:

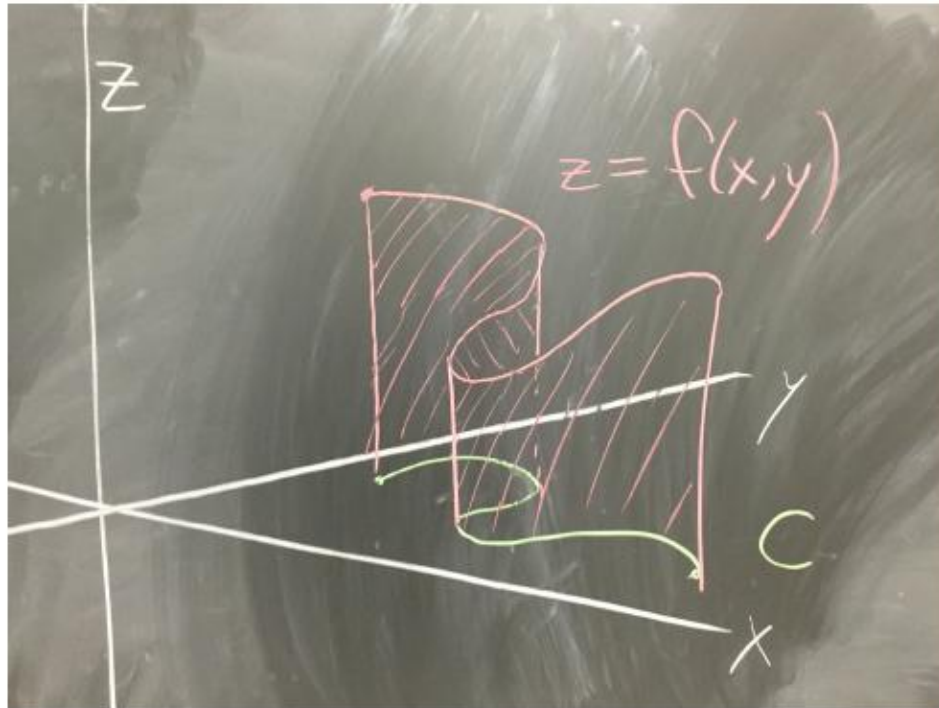


Слика 1

Забележи дека кривата не мора да го задоволува вертикалниот линиски тест за единственост бидејќи додека $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ е функција од t , вредноста на y не мора да е функција од x .

Нека $f(x, y)$ е функција дефинирана на C .

Прашање. Колку е плоштината на „црвената лента“ над кривата C и под графикот на f ? Види ја слика 2 подолу.



Слика 2

Ќе ја пресметаме плоштината како интеграл на вообичаениот начин. Ќе го поделиме временскиот интервал $[a, b]$ на n - еднакви делови. Тогаш кривата C е поделена на n (возможно нееднакви) делови. На овој начин добиваме n - „брановити правоаголници“ со базни основи вдоль кривата C (види слика 3).

Висината на еден ваков „брановит правоаголник“ е определена со:

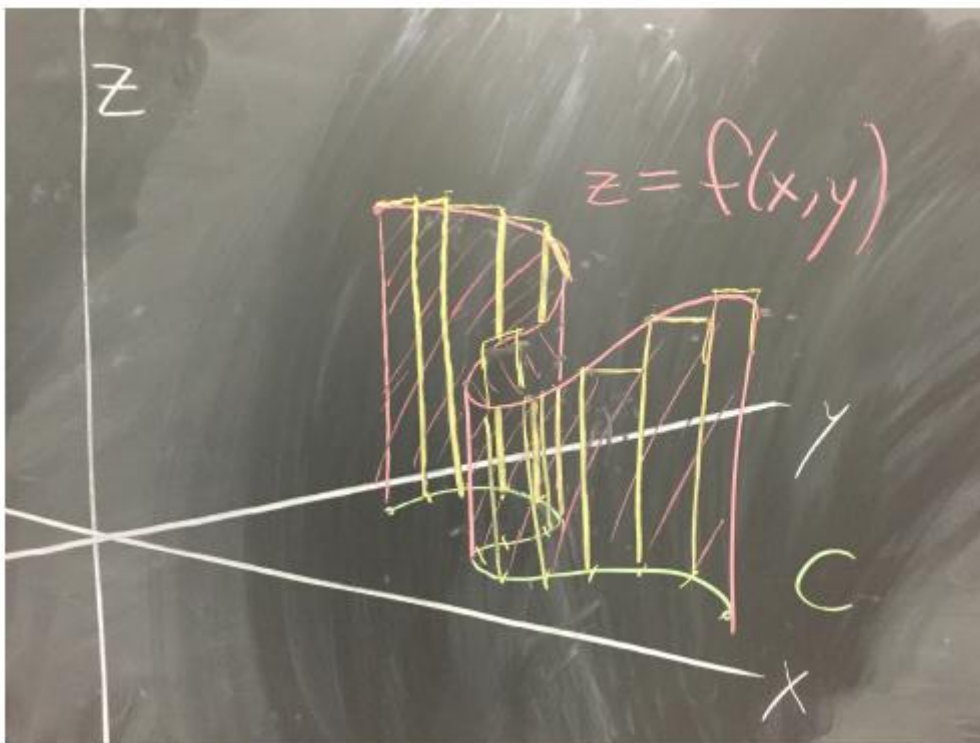
$$\text{висина} = f(\vec{r}(t_j))$$

додека должината на базната основа е:

$$\text{должина} \approx \|\vec{r}'(t_j)\| \Delta t$$

Ова може да го толкуваме и од физичка перспектива:

$$\|\vec{r}'(t_j)\| \Delta t = \text{брзина} \times \text{време} = \text{изминат пат}$$



Слика 3

Со сумирање на правоаголниците и земајќи гранична вредност при $n \rightarrow \infty$, како што е вообичаено, добиваме дека плоштината на „црвената лента“ е

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y) ds &= \int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt = \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \end{aligned}$$

Ова велиме дека е **криволиниски интеграл од прв тип** или **криволиниски интеграл во однос на должината на кривата**.

Забележи дека во специјалниот случај кога $f \equiv 1$ имаме дека:

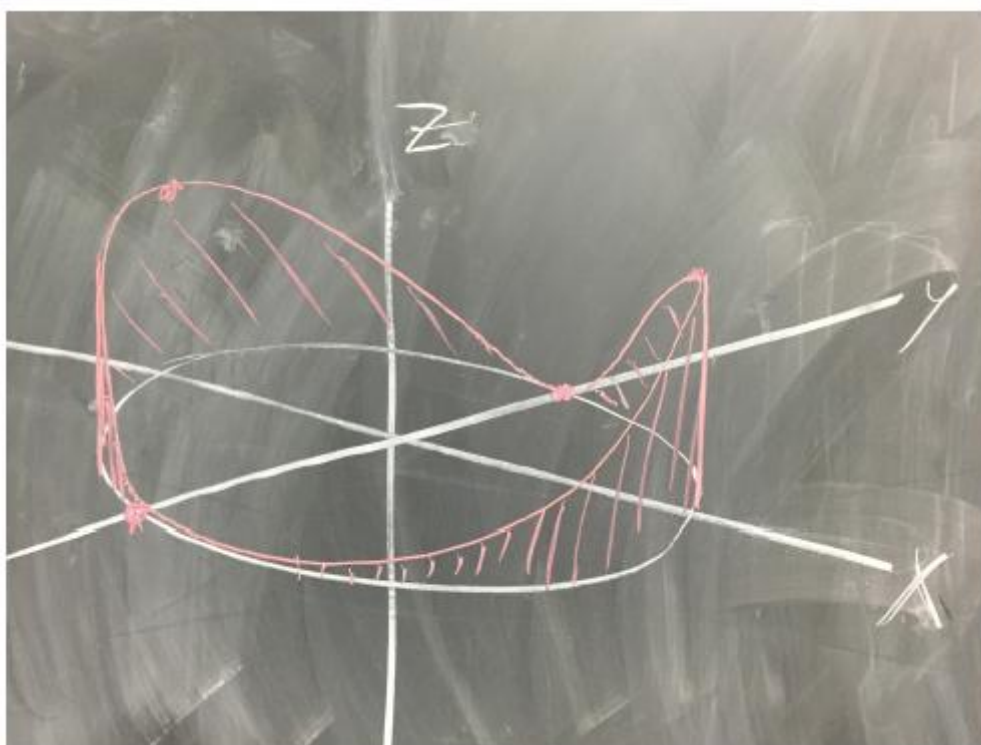
$$\int_C f(x, y) ds = \int_C ds = \text{должина на кривата } C$$

На интегралот може да гледаме и како плоштина на лента со константна висина 1 чија база е вдоль кривата C . Оттука за плоштината добиваме:

$$1 \times (\text{должината на } C) = \text{должината на } C$$

Забелешка. Да забележиме дека интегралот $\int_C f(x, y) ds$ не зависи од начинот на кој е параметризирана кривата C . Имено, геометриската плоштина на црвената лента погоре не зависи од брзината со која параметризацијата $\vec{r}(t)$ патува вдоль кривата C . Ќе го илустрираме ова на следниов пример:

Пример1. Нека C е кривата $x^2 + y^2 = 1$ и нека $f(x, y) = x^2$. Тогаш $\int_C f(x, y) ds$ е плоштината на следнава црвена лента:



Слика 4

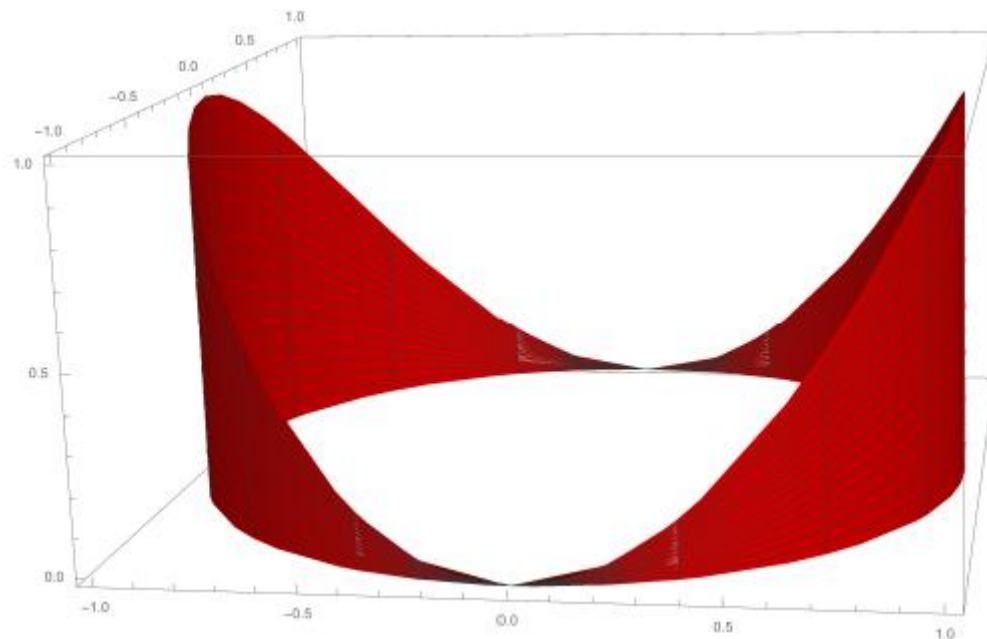
или во Mathematica види слика 5.

За да ја пресметаме плоштината на црвената лента ја параметризираме кружницата на вообичаениот начин:

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Оттука имаме дека $\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$, $\|\vec{r}'(t)\| = 1$.

Сега за плоштината добиваме:



Слика 5

$$\begin{aligned}
 \int_C f(x, y) ds &= \int_0^{2\pi} f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt = \\
 &= \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t) \cdot 1 dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \\
 &= \pi
 \end{aligned}$$

Забележи дека можеме да ја параметризираме кружницата со:

$$\vec{r}(t) = (\cos 2t, \sin 2t), \quad 0 \leq t \leq \pi$$

(ја исцртува истата крива, но двапати побргу). Тогаш имаме:

$$\vec{r}'(t) = (-2 \sin 2t, 2 \cos 2t), \quad \|\vec{r}'(t)\| = 2$$

Оттука за плоштината имаме:

$$\begin{aligned}
 \int_C f(x, y) ds &= \int_0^{\pi} f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt = \\
 &= \int_0^{\pi} f(\cos 2t, \sin 2t) \cdot 2 dt = \int_0^{\pi} \cos^2 2t \cdot 2 dt = \\
 &= \int_0^{2\pi} \cos^2 u du = \pi
 \end{aligned}$$

Како што очекувавме интегралот не зависи од параметризацијата на кривата C .

Пример. Пресметај ја должината L на кривата дадена со:

$$\vec{r}(t) = (e^t + e^{-t}, 5 - 2t), \quad 0 \leq t \leq 3$$

За изводот имаме дека:

$$\vec{r}'(t) = (e^t - e^{-t}, -2), \quad \|\vec{r}'(t)\| = e^t + e^{-t}$$

Оттука имаме дека:

$$\begin{aligned} L &= \int_C ds = \int_0^3 \|\vec{r}'(t)\| dt = \\ &= \int_0^3 (e^t + e^{-t}) dt = \\ &= e^3 - e^{-3} \end{aligned}$$

Забелешка. За криви во повисоки димензии дефиницијата на криволинискиот интеграл од прв тип е аналогна.