

### ПРЕДАВАЊЕ 3

(Летен семестар 20/21: 02.03.2021)

*„Диференцијално сметање кај функции од повеќе променливи“*

Идеата за диференцирање е прилично едноставна. Нелинеарните функции знаат да бидат прилично сложени, па сакаме да ги споредуваме со нешто поедноставно. Првото нешто што ни паѓа на ум се линеарните функции. Изводот на една функција претставува најдобра линеарна апроксимација за таа функција (гледано од локална перспектива). На пример кај функциите од една променлива всушност бараме равенка на права. Знаеме точка од правата, па она што ни недостига е нејзиниот коефициент на правец.

**Дефиниција.** Нека  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  е реална функција и нека  $a \in \mathbb{R}$  е произволен реален број. За функцијата  $f$  велиме дека е диференцијабилна во точката  $a$  ако постои  $\alpha \in \mathbb{R}$  таков што  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \alpha$ .

За да ја разбереме дефиницијата за извод на функција од повеќе променливи, горната дефиниција ќе ја запишеме во малку изменета форма:

**Дефиниција.** Нека  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  е реална функција и нека  $a \in \mathbb{R}$  е произволен реален број. За функцијата  $f$  велиме дека е диференцијабилна во точката  $a$ , со извод  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ако  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - \alpha(x - a)}{x - a} = 0$ .

Сега сме подготвени да ја воведеме дефиницијата за извод на функција од повеќе променливи:

**Дефиниција.** Нека  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  е дадена векторска функција и нека  $P \in \mathbb{R}^n$  е дадена точка. За функцијата  $f$  велиме дека е диференцијабилна во точката  $P$ , со извод  $m \times n$  матрица  $A$  ако:

$$\lim_{Q \rightarrow P} \frac{f(Q) - f(P) - A\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = 0$$

Ќе пишуваме  $Df(P) = A$ . Прашањето што природно се наметнува е „Па добро како ќе го пресметуваме изводот?“ Сакаме всушност да ја определиме матрицата  $A$ .

Претпоставуваме дека  $m=n=2$ , па матрицата  $A$  го добива обликот  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

Тогаш пресметуваме:

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

и

$$Ae_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

Ова значи дека во општ случај кога  $A$  е  $m \times n$  матрица,  $j$ -тата колона на матрицата  $A$  може да ја добиеме како производ на  $A$  со вектор колоната определена од единечниот вектор  $e_j$ . Оттука не интересира што всушност се случува доколку се приближуваме кон точката  $P$  вдоль правата определена со векторот  $e_j$ . Значи правиме избор  $\overrightarrow{PQ} = he_j$ , каде  $h$  се доближува произволно блиску кон нулата. Поинаку кажано, правиме избор за  $Q = P + he_j$ . Ќе претпоставиме дека  $h > 0$ . Ја разгледуваме дробката:

$$\begin{aligned} \frac{f(Q) - f(P) - A(he_j)}{\|\overrightarrow{PQ}\|} &= \frac{f(Q) - f(P) - A(he_j)}{h} = \\ &= \frac{f(Q) - f(P) - hA(e_j)}{h} = \frac{f(Q) - f(P)}{h} - A(e_j) \end{aligned}$$

Ако побараме лимес ја добиваме  $j$ -тата колона на матрицата  $A$ :

$$Ae_j = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P + he_j) - f(P)}{h} \quad (*)$$

Од друга страна забележи дека  $f(P + he_j) - f(P)$  е вектор колона чии елемент во  $i$ -тата редица е:

$$f_i(P + he_j) - f_i(P) = f_i(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \dots, a_n) - f_i(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

Ова значи дека во десната страна на  $(*)$  во  $i$ -тата редица имаме:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(P + he_j) - f_i(P)}{h}$$

што е мотивација за следнава дефиниција:

**Дефиниција.** Нека  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  е дадена функција и нека  $P \in \mathbb{R}^n$  е произволна точка. *Парцијален извод* за функцијата  $g$  во точката  $P = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  во однос на променливата  $x_j$  е граничната вредност:

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(P) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a_1, a_2, \dots, a_j + h, \dots, a_n) - g(a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_n)}{h}.$$

Како резиме на претходната дискусија ја добиваме следнава:

**Пропозиција.** Нека  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  е дадена векторска функција. Ако  $f$  е диференцијабилна во точка  $P \in \mathbb{R}^n$  тогаш нејзиниот извод е матрица  $Df(P)$  чија  $(i, j)$ -ќелија е парцијалниот извод:  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)$ .

**Забелешка.** Линеарната функција придружена на матрицата  $Df(P)$  е диференцијалот на функцијата  $f$  во точката  $P$ .

На пример за скаларна функција  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  диференцијал за функцијата  $f$  во точката  $P$  е:  $df(P)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(P)h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(P)h_n$ , каде  $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ .

**Забелешка.** Матрицата  $Df(P)$  велиме дека е Јакобиева матрица за функцијата  $f$  во точката  $P$ . Во случајот кога  $m=n$  нејзината детерминантна уште велиме дека е Јакобијан за функцијата  $f$  во точката  $P$ . Јакобијанот на едно пресликување игра важна улога во многу проблеми поврзани со особините на тоа пресликување. Ако пресликувањето е зададено преку координатните функции  $f_j$  тогаш Јакобијанот се означува со:

$$\frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)}(P) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(P) \end{vmatrix}$$

**Пример.** Нека  $A = \{(r, \theta) | r > 0, 0 < \theta < 2\pi\} \subseteq \mathbb{R}^2$  и нека  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^2$  е векторска функција определена со:  $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Препоставуваме дека функцијата е диференцијабилна во секоја точка  $(r, \theta) \in A$ . Ќе го пресметаме нејзиниот извод и Јакобијан. Имено за изводот ги пресметуваме парцијалните изводи од координатните функции, па добиваме:

$Df(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$ , додека за Јакобијанот на  $f$  добиваме  $\det(Df(r, \theta)) = r$ .

Ова се пресметки за поларна смена што ќе ги ползуваме често во иднина.

**Пример2.** Нека  $A = \{(r, \varphi, \theta) \mid r > 0, 0 < \varphi < 2\pi, 0 < \theta < \pi\} \subseteq \mathbb{R}^3$  и нека  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  е векторска функција определена со:

$$f(r, \varphi, \theta) = (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta)$$

Препоставуваме дека функцијата е диференцијабилна во секоја точка  $(r, \varphi, \theta) \in A$ . Ќе го пресметаме нејзиниот извод и Јакобијан. Имено за изводот ги пресметуваме парцијалните изводи од координатните функции, па добиваме:

$$Df(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{pmatrix}$$

додека за Јакобијанот на  $f$  добиваме  $\det(Df(r, \varphi, \theta)) = r^2 \sin \theta$ . Ова се пресметки за сферна смена што ќе ги ползуваме често во иднина.

**Дефиниција.** Нека  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  е диференцијабилна функција. Тогаш изводот на  $f$  во точка  $P \in \mathbb{R}^n$  е вектор редица  $Df(P)$  што го нарекуваме и **градиент** на функцијата  $f$ , а го означуваме и:

$$\nabla f(P) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \frac{\partial f}{\partial x_2}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right)$$

Точката  $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$  лежи на графот на  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ако  $x_{n+1} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Точката  $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$  лежи на **тангентната хипер-рамнина** за функцијата  $f$  во точката  $P = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  ако:

$$x_{n+1} = f(a_1, a_2, \dots, a_n) + \nabla f(P)(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)$$

Поинаку кажано, векторот  $\left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \frac{\partial f}{\partial x_2}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P), -1 \right)$  е нормален на тангентната хипер-рамнина и се разбира точката  $(a_1, a_2, \dots, a_n, f(a_1, a_2, \dots, a_n))$  лежи на тангентната хипер-рамнина.

**Пример.** Нека  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r^2\}$  е отворена топка со радиус  $r$  центрирана во координатниот почеток. Ќе ја разгледаме функцијата  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  определена со:

$$f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

Тогаш за парцијалните изводи добиваме:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}, \text{ и од причини на симетрија } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$$

Во точка  $P = (a, b) \in D$  градиентот е определен со:

$$\nabla f(P) = \frac{-1}{\sqrt{r^2 - a^2 - b^2}}(a, b)$$

Оттука за равенката на тангентната рамнина добиваме:

$$z = f(a, b) - \frac{1}{\sqrt{r^2 - a^2 - b^2}}(a(x - a) + b(y - b))$$

На пример за  $(a, b) = (0, 0)$  тогаш за равенката на тангентната рамнина добиваме  $z = r$ , што е и очекувано.

**Забелешка.** Запознајте се со сферните и цилиндрични координати малку повеќе. Ако не, јас ќе ве запознаам во некои од следните предавања 😊.