

## ПРЕДАВАЊЕ 11

(Летен семестар 21/22: 18.05.2022)

### „Гринова теорема-примери“

Пример. Ползувај ја теоремата на Грин за да го пресметаш следниов криволиниски интеграл:

$$I = \oint_{\gamma^+} (e^x (1 - \cos y)) dx + (e^x (\sin y - y)) dy$$

каде  $\gamma^+$  е раб на областа  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < \pi, 0 < y < \sin x\}$ .

Решение: Одиме со теоремата на Остроградски во рамнина :

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left( \frac{\partial}{\partial x} (e^x (\sin y - y)) - \frac{\partial}{\partial y} (e^x (1 - \cos y)) \right) dx dy = \\ &= - \iint_D y e^x dx dy = - \int_0^\pi e^x dx \int_0^{\sin x} y dy = - \frac{1}{2} \int_0^\pi e^x \sin^2 x dx = \\ &= - \frac{1}{4} \int_0^\pi e^x (1 - \cos 2x) dx = - \frac{1}{4} e^x \left( 1 - \frac{1}{5} (\cos 2x + 2 \sin 2x) \Big|_0^\pi \right) = \\ &= - \frac{1}{5} (e^\pi - 1) \end{aligned}$$

при што ползувавме позитивна ориентација на кривата  $\gamma$ .

Пример. Пресметај ја разликата на криволиниските интеграли:

$$I_1 = \int_{AmB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy \text{ и } I_2 = \int_{AnB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$$

каде  $AmB$  е сегмент од права што ги поврзува точките  $A(1,1)$  и  $B(2,6)$  додека  $AnB$  е дел од парабола со вертикална оска што минува низ точките  $A(1,1)$ ,  $O(0,0)$  и  $B(2,6)$ .

Решение: Да забележиме дека равенката на параболата што минува низ точките  $A(1,1)$ ,  $O(0,0)$  и  $B(2,6)$  е определена со:

$$AnB: y = 2x^2 - x,$$

додека разликата на интегралите  $I_2 - I_1$  претставува криволиниски интеграл по затворена крива  $AnBmA$  со позитивна ориентација што ограничува област  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ . Исполнети се условите од теоремата на Грин, па имаме дека:

$$I_2 - I_1 = \oint_{AnBmA} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy = \iint_D \left( \frac{\partial}{\partial x} (-(x-y)^2) - \frac{\partial}{\partial y} (x+y)^2 \right) = -4 \iint_D x dx dy$$

откаде ползувајќи ја теоремата за премин од двоен кон повторен интеграл добиваме:

$$I_2 - I_1 = -4 \int_1^2 x dx \int_{2x^2-x}^{5x-4} dy = -4 \int_1^2 (6x^2 - 4x - 2x^3) dx = -2.$$

Следува дека  $I_1 - I_2 = 2$ .

Пример. Пресметај го следниов криволиниски интеграл:

$$I = \int_{AmO} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy,$$

каде  $AmO$  е горната полукружница зададена со равенката  $x^2 + y^2 = ax$ , и ориентација од точката  $A(a, 0)$  до точката  $O(0, 0)$ .

Решение: Да забележиме дека подинтегралната диференцијалната форма:

$$\omega = (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy$$

вдолж сегментот  $[0, a]$  е нула. Следува дека криволинискиот интеграл по кривата  $AmO$  е еднаков на криволинискиот интеграл по затворената крива  $AmOA$  што се состои од кривата  $AmO$  и сегментот  $[0, a]$ . Да забележиме дека затворената крива  $AmOA$  ограничува област  $D$  определена со:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \sqrt{ax - x^2}\}$$

Исполнети се условите од теоремата на Грин, па имаме:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left( \frac{\partial}{\partial x} (e^x \cos y - m) - \frac{\partial}{\partial y} (e^x \sin y - my) \right) dx dy = \\ &= m \iint_D dx dy = \frac{m}{8} a^2 \pi \end{aligned}$$

Пример. Докажи дека плоштината на делот од рамнината  $D$  ограничен со проста затворена крива  $\gamma$  е определена со релацијата:

$$P(D) = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} x dy - y dx \quad (*)$$

Доказ: Одиме со теоремата на Грин. Да забележиме дека  $P(x, y) = -y$  и  $Q(x, y) = x$  откаде нашиот интеграл го добива обликот:

$$\oint_{\gamma} xdy - ydx = \iint_D \left( \frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y) \right) dxdy = 2 \iint_D dxdy = 2P(D)$$

Релацијата (\*) следува.

Пример. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината ограничен со елипсата

$$\gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Решение: Воведуваме параметризација на елипсата со релациите:

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Ја ползуваме релацијата од претходната задача, па добиваме:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \oint_{\gamma} xdy - ydx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos \theta)(b \cos \theta) d\theta - (b \sin \theta)(-a \sin \theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} abd\theta = ab\pi \end{aligned}$$

**Забелешка.** Специјално за  $a = b$  ја добиваме повторно формулата за пресметување на плоштина на круг со даден радиус  $a$ .