

ПРЕДАВАЊЕ 9

(Летен семестар 20/21: 23.03.2021)

„Тејлоров развој на функции од повеќе променливи“

Ќе го разгледаме најпрво развојот според Тејлор со остаток во Лагранжов облик на функција од една променлива. Значи одиме со развојот во облик:

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} h^k \frac{d^k}{dx^k} f(a) + R_n(a, h),$$

каде

$$R_n(a, h) = \frac{1}{(n+1)!} h^{n+1} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} f(a + \theta h), \quad 0 < \theta < 1$$

При обидот да ја пренесеме оваа формула во повисока димензија, изразите што се јавуваат во неа прилично се комплицираат. За да го задржиме релативно едноставниот запис ќе прифатиме неколку конвенции:

Најпрвин вредноста на диференцијалот $Df(x)h$ за скаларна функција $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, каде $A \subseteq \mathbb{R}^m$ во точка $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in A$ пресметан за вредност на прираснувањето $h = (h_1, h_2, \dots, h_m)$ може формално да го запишеме во следниов облик:

$$Df(a)h = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \dots + h_m \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right) f(a)$$

Понатаму, ќе воведеме формален „квадрат“ на последниов израз со:

$$\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^2 f(a) = \sum_{i_1, i_2} h_{i_1} h_{i_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(a)$$

каде сумирањето се прави по сите индекси i_1, i_2 од 1 до m . Слично за произволно $k \in \mathbb{N}$, под претпоставка дека $f \in C^k(A)$ дефинираме:

$$\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^k f(a) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}(a)$$

каде сумирањето се прави по сите индекси $i_1, i_2, \dots, i_k$ од 1 до m . Забележи дека последната сума ползувајќи ја полиномната формула може да се запише во следниов облик:

$$\sum \frac{k!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m!} h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} \dots h_m^{\alpha_m} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}(a)$$

каде сега сумирањето се прави по сите ненегативни цели броеви $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ такви што $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = k$.

Забелешка. Полиномната формула е природна генерализација на биномната формула со замена на биномните коефициенти $\binom{n}{k}$ со мулти-коефициенти $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m}$. Доказот е лесно прилагодлив од биномниот случај ☺☺ (ха ха ха).

Сега сме подготвени да ја формулираме теоремата за развој според Тејлор на реална функција од m променливи со остаток во Лагранжов облик:

Теорема. Нека $f \in C^{n+1}(A, \mathbb{R})$, каде $A \subseteq \mathbb{R}^m$ е отворено множество. Понатаму, нека сегментот $[a, a+h]$ целосно се содржи во A . Тогаш постои реален број $\theta \in (0,1)$ таков што важи следнава релација:

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^k f(a) + R_n(a, h) \quad (*)$$

каде

$$R_n(a, h) = \frac{1}{(n+1)!} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^{n+1} f(a + \theta h) \quad (**)$$

Доказ: Ќе ја разгледаме функцијата $\varphi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ дефинирана со $\varphi(t) = f(a+th)$. Забележи дека $\varphi \in C^{n+1}[0,1]$. Според правилото за диференцирање на сложена функција добиваме:

$$\varphi'(t) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a+th) + \dots + h_m \frac{\partial f}{\partial x_m}(a+th)$$

откаде добиваме:

$$\begin{aligned}\varphi''(t) &= \sum_{i_1, i_2=1}^m h_{i_1} h_{i_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(a+th) \\ &= \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^2 f(a+th)\end{aligned}$$

односно за произволно $k \in \{1, 2, \dots, n+1\}$

$$\varphi^{(k)}(t) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^k f(a+th)$$

Сега на функцијата φ ја ползуваме теоремата за развој по Тејлор на функција од една променлива на сегментот $[0,1]$ со остаток во облик на Лагранж откаде заклучуваме дека постои $\theta \in (0,1)$ така што важат релациите (*) и (**). Доказот е комплетиран.

Забелешка. Доколку се ползува развој по Тејлор со остаток во облик на Пеано во претходната теорема тогаш ќе се добие развој по Тејлор за функции од повеќе променливи со остаток во облик на Пеано.

Забелешка. Специјално за $a = \underline{0}$ развојот по Тејлор во горната теорема велиме дека е развој по Мек-Лорен.

Пример: Развиј ја во Мек-Лоренов ред следнава функција:

$$f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$$

Решение: Го ползуваме Мек-Лореновиот развојот на функцијата:

$$\sin u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} u^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad u \in \mathbb{R}$$

Воведуваме смена $u = x^2 + y^2$ во горната релација, па добиваме:

$$\sin(x^2 + y^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x^2 + y^2)^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Забелешка. Во збирката имате убави илустрации на горната теорема.