

ПРЕДАВАЊЕ 8

(Летен семестар 21/22: 05.05.2022)

„Криволиниски интеграл од втор тип“

Ќе дефинираме криволиниски интеграл во векторско поле или како што вели насловот на ова предавање криволиниски интеграл од втор тип.

Векторско поле.

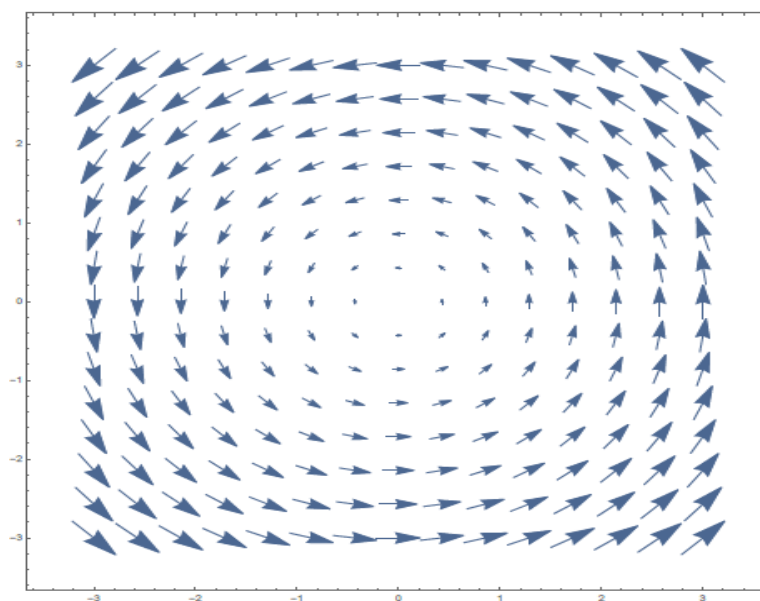
Дефиниција. Векторско поле (или векторско вредносни функции) е непрекината функција $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Специјално, за $n = 2$ велиме дека е **планарно векторско поле** и означуваме:

$$F(x, y) = (M(x, y), N(x, y))$$

каде $M(x, y)$ и $N(x, y)$ се непрекинати реални функции.

Забележи дека секое векторско поле доделува вектор на секоја точка од просторот. За визуелизација на произволно векторско поле во секоја точка P од просторот го придружуваме доделениот вектор (го цртаме со стрелка со база во точката P).

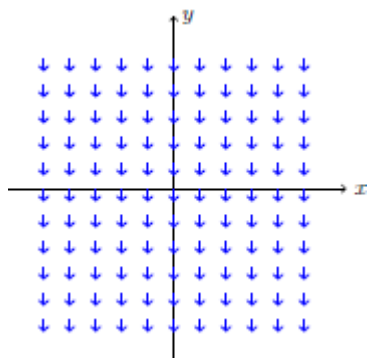
Пример1. Нека $F(x, y) = (-y, x)$ е векторско поле во $\mathbb{R}^2$. Графичкиот приказ види го на слика 1.



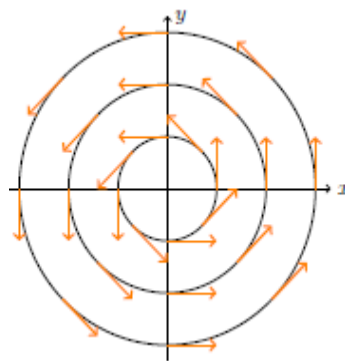
Слика 1

Пример2. Константно гравитационо векторско поле $F(x, y) = (0, -g)$.

Пример 3. Единечно тангенцијално векторско поле $F(x, y) = \frac{(-y, x)}{r}$, каде r е вообичаениот модул на соодветниот радиус вектор. Полето е тангенцијално во смисла дека е тангентно на кружници со центар во координатниот почеток.



константно векторско поле



единечно тангентно векторско поле

Нека $F(x, y) = (M(x, y), N(x, y))$ е дадено векторско поле. Понатаму, нека C е параметризирана рамнинска крива дадена со $r(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$. Забележи дека $dr = (dx, dy)$.

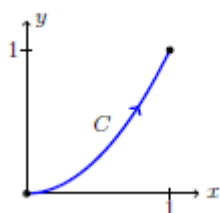
Дефиниција. Криволиниски интеграл од F вдоль крива C е дефиниран со:

$$\int_C F \cdot dr = \int_C (M, N) \cdot (dx, dy) = \int_C Mdx + Ndy = \int_a^b (Mx'(t) + Ny'(t))dt$$

Следниве примери ја илустрираат горната дефиниција:

Пример4: Нека $F(x, y) = (x^2y, x - 2y)$ и нека C е кривата $r(t) = (t, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$. Пресметај го интегралот $I = \int_C F \cdot dr$.

Решение: Кривата е прикажана на слика 2 подолу.



Слика 2

Забележи дека $r = (x, y)$, па $x = t, y = t^2$. Во овие ознаки имаме дека $F = (M, N)$, па $M = x^2 y$ и $N = x - 2y$.

Ќе запишеме се преку t :

$$\begin{aligned} dx &= dt, \\ dy &= 2dt \\ M &= (t^2)(t^2) = t^4 \\ N &= t - 2t^2 \end{aligned}$$

Со замена во дадениот интеграл добиваме:

$$I = \int_C M dx + N dy = \int_0^1 t^4 dt + (t - 2t^2) 2t dt = \int_0^1 (t^4 + 2t^2 - 4t^3) dt = -\frac{2}{15}$$

Градиент, циркулација и дивергенција на векторско поле.

За дадена функција $f(x, y)$ дефинираме **градиент** на f со: $\text{grad} f = \nabla f = (f_x, f_y)$.

За дадено векторско поле во рамнината $F(x, y) = (M(x, y), N(x, y))$ дефинираме **циркулација** на векторско поле со:

$$\text{curl} F = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \vec{k}$$

За дадено векторско поле во рамнината $F(x, y) = (M(x, y), N(x, y))$ дефинираме **дивергенција** на векторско поле со:

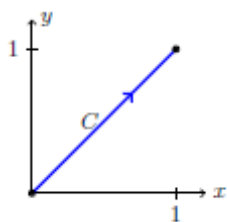
$$\text{div} F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$$

Забелешка. Воведените поими имаат соодветно физичко толкување за што е пожелно соодветно физичко присуство ☺)

Особини на криволиниски интеграли.

Пример 5. Ќе го разгледаме повторно примерот 4. Ќе го интегрираме истото векторско поле, но ќе ја смениме кривата вдоль која ќе интегрираме. Имено, нека C е отсечката

што ги поврзува точката $(0,0)$ и $(1,1)$. Значи почетната и крајната точка се совпаѓаат како во примерот 4, но патеката на интегрирање е различна.



Слика 3

Ќе ја ползуваме ознаката $I = \int_C Mdx + Ndy$.

Ќе ја параметризираме дадената крива со: $x=t, y=t, 0 \leq t \leq 1$.

Ќе запишеме се преку t :

$$dx = dt,$$

$$dy = dt$$

$$M = x^2 y = t^3$$

$$N = x - 2y = -t$$

Со замена во дадениот интеграл добиваме:

$$I = \int_C Mdx + Ndy = \int_0^1 t^3 dt - t dt = \int_0^1 (t^3 - t) dt = -\frac{1}{4}$$

Забележи дека добиената вредност се разликува од онаа во примерот 4. Ова не води до важен заклучок дека

Својство1. *Криволиниските интеграл над две различни патеки со иста почетна и крајна точка може да се разликуваат.*

Пример6. Повторно ќе го разгледаме примерот 4. Сега ќе одиме со истото векторско поле и крива, но ќе ја смениме параметризацијата на кривата C . Имено, нека

$$x = \sin t, y = \sin^2 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Пресметај го интегралот $I = \int_C F \cdot dr$.

Решение: Ќе запишеме се преку t :

$$dx = \cos t dt,$$

$$dy = 2 \sin t \cos t dt$$

$$M = x^2 y = \sin^2 t \sin^2 t = \sin^4 t$$

$$N = x - 2y = \sin t - 2 \sin^2 t$$

Со замена во дадениот интеграл $I = \int_C M dx + N dy$ добиваме: $I = -\frac{2}{15}$ (пресметката е лесна вежба!).

Ова не наведува на следнава особина на криволините интегралите:

Својство 2. Криволинискиот интеграл не зависи од параметризацијата на кривата C

Својство 3. Криволинискиот интеграл зависи од ориентацијата на кривата C . Имено важи:

$$\int_{-C} F \cdot dr = - \int_C F \cdot dr$$

Забелешка. Значи при интегрирање вдоль крива со спротивна ориентација интегралот го менува знакот!

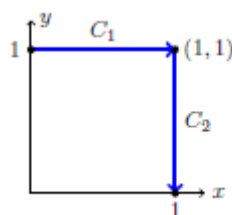
Зад1. Потврди го својството 3 на примерот 4. Воведи параметризација на кривата $-C$, а потоа пресметај го интегралот.

Следнава особина воспоставува врска меѓу криволините интегралите од прв и втор тип:

Својство 4. $\int_C F \cdot dr = \int_C F \cdot T ds$, каде T е единичниот тангентен вектор на кривата C .

Забелешка. Забележи дека $\frac{dr}{dt} = T \frac{ds}{dt}$, па $dr = T ds$.

Зад 2. Пресметај го интегралот $I = \int_C y dx + (x + 2y) dy$ каде кривата $C = C_1 \cup C_2$ е правоаголна патека од $(0,1)$ до $(1,0)$ прикажана на сликата подолу:



Решение: Самостојно.

Забелешка. Кривата е по делови глатка, па важи

$$I = \int_C Mdx + Ndy = \int_{C_1} Mdx + Ndy + \int_{C_2} Mdx + Ndy$$

Пример 7. Пресметај го интегралот $I = \oint_C -ydx + xdy$, каде C е единечната кружница со ориентација спротивна од стрелките на часовникот (ССЧ).

Забелешка. При интегрирање вдоль затворена крива ја ползуваме ознаката

$$\oint_C F \cdot dr = \oint_C Mdx + Ndy$$

Кругчето во интегралот ни укажува дека кривата вдоль која интегрираме е затворена.

Решение: Одиме со параметризација $x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$. Со директна замена добиваме:

$$I = \int_0^{2\pi} -\sin t (-\sin t) dt + \cos t (\cos t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

