

ПРЕДАВАЊЕ 16

(Летен семестар 20/21: 14.04.2021)

„Интерпретација и особини на двојни интеграли“

Го дефинираваме двојниот интеграл на ограничена реална функција $f(x, y)$ од две променливи над ограничено подмножество D од рамнината ползувајќи ја Римановата интегрална сума. Забележи дека дефиницијата може да ја преведеме во еквивалентна форма на следниов начин:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ \Delta y_j \rightarrow 0}} \sum_{\substack{\text{потправоаголници} \\ \text{што го сечат } D}} f(c_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

каде потправоаголниците се добиени од поделба на правоаголник P што ја содржи областа D . Уште повеќе забележи дека двојниот интеграл е гранична вредност на суми. Ова значи дека ако типичниот член на сумата (суманд) $f(c_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$ претставува „нешто“ тогаш $\iint_D f(x, y) dx dy$ претставува тотална сума на „нешто“. Ќе разгледаме неколку примери:

Пример. Нека подинтегралната функција $f(x, y)$ претставува некаква „густина“ или квантитет на единица површина, во точката (x, y) , на пример густина на маса или густина на популација. Тогаш $f(c_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$ е апроксимативно квантитетот на типичен потправоаголник, додека:

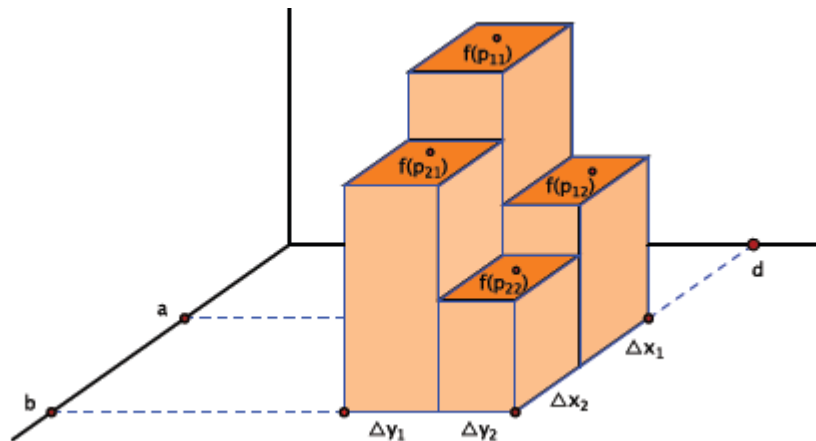
$$\iint_D \text{густина} dx dy = \text{тоталниот квантитет на } D$$

Пример. Нека f е константна функција $f(x, y) = 1$, за секој $(x, y) \in D$. Тогаш $f(c_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j = 1 \cdot \Delta x_i \Delta y_j$ е плоштината на потправоаголникот P_{ij} , па имаме:

$$\iint_D 1 dx dy = \text{плоштина}(D)$$

Пример. Ќе го разгледаме графот на функцијата $z = f(x, y)$, каде $f(x, y) \geq 0$ за секој $(x, y) \in D$. Тогаш $f(c_{ij})$ е висината на графот над примерок точката c_{ij} , додека $f(c_{ij})\Delta x_i \Delta y_j$ е апроксимативно волуменот под графот и над типичен потправоаголник P_{ij} од поделбата (види слика 1). Оттука имаме:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \text{волумен под графот на } z = f(x, y) \text{ и над } D.$$



Слика 1: Визуелизација на Риманова сума како апроксимација на волумен под граф на дадена функција $z = f(x, y)$

Како последица на ова волуменот може да се гледа и како двоен интеграл, но и како итериран (повторен), што е убава илустрација за теоремата на **Фубини** што следува.

Теорема на Фубини. Нека f е интегрибилна функција на правоаголникот $P = [a, b] \times [c, d]$. Тогаш постојат итерираните (повторени) интеграл и важи:

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Забелешка. Доказот на теоремата лесно следува од преуредување на Римановата интегрална сума за двојниот интеграл $\sum_{i,j} f(c_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$ во:

1) колона по колона: $\sum_i \left(\sum_j f(c_{ij}) \Delta y_j \right) \Delta x_i$, или

2) редица по редица: $\sum_j \left(\sum_i f(c_{ij}) \Delta x_i \right) \Delta y_j$

Забележи уште дека првата е апроксимација на повторениот интеграл $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$, додека втората е апроксимација на повторениот интеграл $\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$.

Теоремата на Фубини има природно обопштување за интегрирање на непрекинати функции над области од три специјални типа:

Дефиниција. Ограничено подмножество $D \subseteq \mathbb{R}^2$ е **елементарен регион** ако е едно од следниве три типа:

Тип 1:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \gamma(x) \leq y \leq \delta(x) \right\}$$

каде $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ се непрекинати функции.

Тип 2:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq x \leq d, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x) \right\}$$

каде $\alpha: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ и $\beta: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ се непрекинати функции.

Тип 3: D е истовремено и од тип 1 и од тип 2.

Теорема. Нека $D \subseteq \mathbb{R}^2$ е елементарен регион и нека $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекината функција. Тогаш важи:

1) Ако D е од тип 1 тогаш:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

2) Ако D е од тип 2 тогаш:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Принцип на вклучување-исклучување.

Следнава теорема е позната како принцип на вклучување и исклучување:

Теорема: Нека $D = D_1 \cup D_2$ е ограничено подмножество од рамнината. Понатаму, нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ е дадена функција. Ако f е интегрибилна над D_1 и над D_2 тогаш f е интегрибилна и над D и над $D_1 \cap D_2$ и уште повеќе важи:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy - \iint_{D_1 \cap D_2} f(x, y) dx dy$$

Забелешка. Специјално, ако $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ или $J(D_1 \cap D_2) = 0$ (се мисли на жордановата мера, т.е. во случајов плошина на $D_1 \cap D_2$) тогаш важи:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$

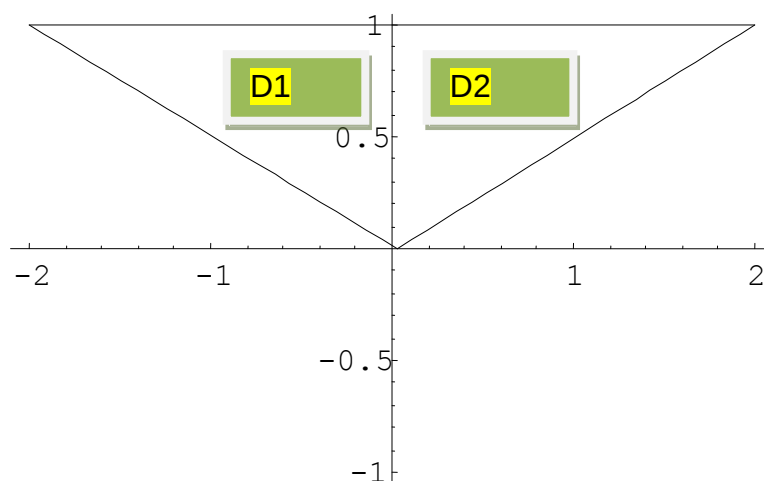
Последнава особина е позната како **адитивност на двојниот интеграл**.

Пример. Запиши го двојниот интеграл $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ како повторен ако:

- (i) Областа на интегрирање D е компактно и конвексно множество со раб ∂D : триаголник со темиња во точките $O(0,0)$; $A(2,1)$ и $B(-2,1)$.
- (ii) Областа на интегрирање е кругот $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq y\}$;
- (iii) Областа на интегрирање D е компактно и конвексно множество со раб ∂D определен со равенката: $(x - y)^2 + x^2 = 1$.

Решение: (i) Ќе го запишеме интегралот I како повторен на два начина во зависност од редоследот на интегрирање. Прво одиме со поделба на D со $D = D_1 \cup D_2$, каде:

$$D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 0, -\frac{x}{2} \leq y \leq 1 \right\} \text{ и } D_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, \frac{x}{2} \leq y \leq 1 \right\}$$



Сега од адитивноста на двојниот интеграл добиваме:

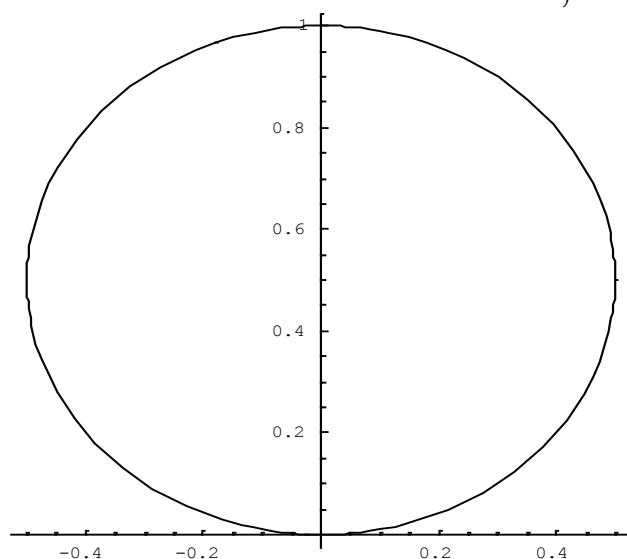
$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy = \\
 &= \int_{-2}^0 dx \int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x, y) dy + \int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x, y) dy
 \end{aligned}$$

Ако го смениме редоследот на интегрирање добиваме:

$$I = \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x, y) dx$$

(ii) Го запишуваме множеството во облик:

$$\begin{aligned}
 D &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} \leq y \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} \right\} = \\
 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{y - y^2} \leq x \leq \sqrt{y - y^2} \right\}
 \end{aligned}$$

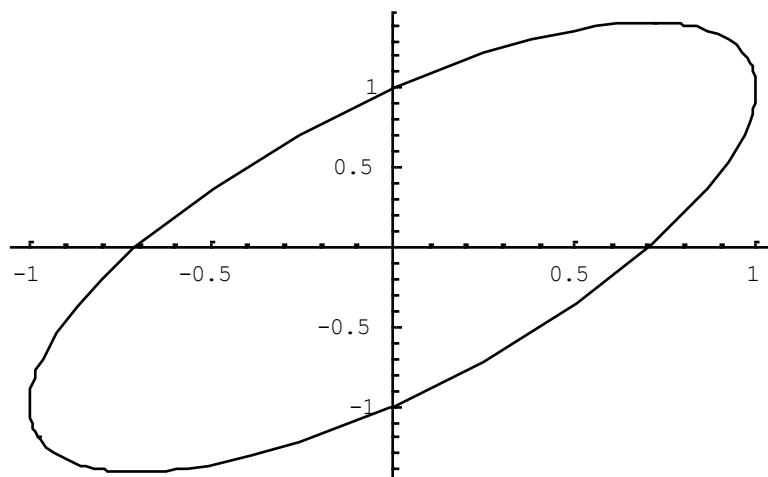


Сега може да ја ползуваме теоремата за премин од двоен на повторен интеграл, па добиваме:

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int_{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}}^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y - y^2}}^{\sqrt{y - y^2}} f(x, y) dx$$

(iii) Слично на претходниот пример одиме со записот:

$$\begin{aligned}
 D &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, x - \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq x + \sqrt{1 - x^2} \right\} = \\
 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}, \frac{y - \sqrt{2 - y^2}}{2} \leq x \leq \frac{y + \sqrt{2 - y^2}}{2} \right\}
 \end{aligned}$$



откаде за интегралот добиваме:

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{x-\sqrt{1-x^2}}^{x+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{\frac{y-\sqrt{2-y^2}}{2}}^{\frac{y+\sqrt{2-y^2}}{2}} f(x, y) dx$$

Пример. Смени го редоследот на интегрирање во повторениот интеграл:

$$I = \int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy$$

Решение: Ползувајќи ја адитивноста на Римановиот интеграл имаме:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy + \int_{\pi}^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy = \\ &= \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy - \int_{\pi}^{2\pi} dx \int_{\sin x}^0 f(x, y) dy \end{aligned}$$

Во секој од интегралите на десната страна од горната релација ќе го смениме редоследот на интегрирање:

За првиот интеграл имаме дека при менување на променливата y од 0 до 1, променливата x се менува од $\arcsin y$ до $\pi - \arcsin y$. Слично за вториот интеграл, при менување на променливата y од -1 до 0, променливата x се менува од $\pi - \arcsin y$ до $2\pi + \arcsin y$.

Сега за промената на редоследот за интегрирање во интегралот I добиваме:

$$\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx - \int_{-1}^0 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{2\pi + \arcsin y} f(x, y) dx$$

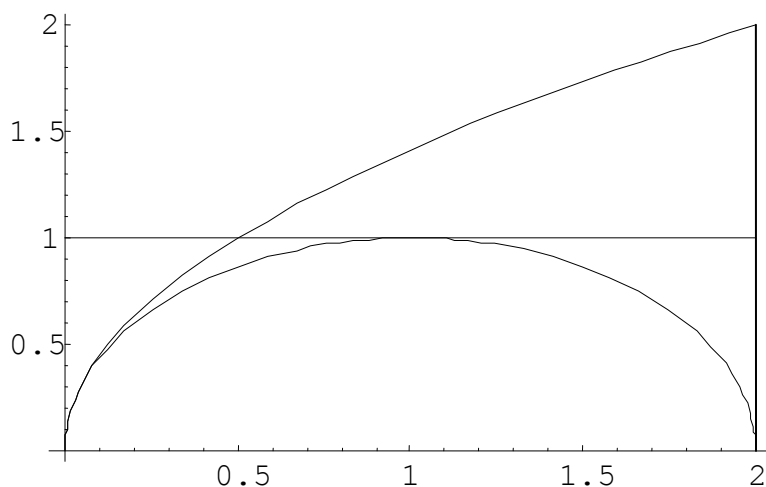
Пример. Смени го редоследот на интегрирање во повторениот интеграл:

$$I = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x, y) dy$$

Решение: Областа на интегрирање:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, \sqrt{2x-x^2} \leq y \leq \sqrt{2x} \right\}$$

ќе ја поделиме на три подобласти со правата $y=1$ како на сликата:



При смената на редоследот на интегрирање ја добиваме следнава сума од повторени интеграли:

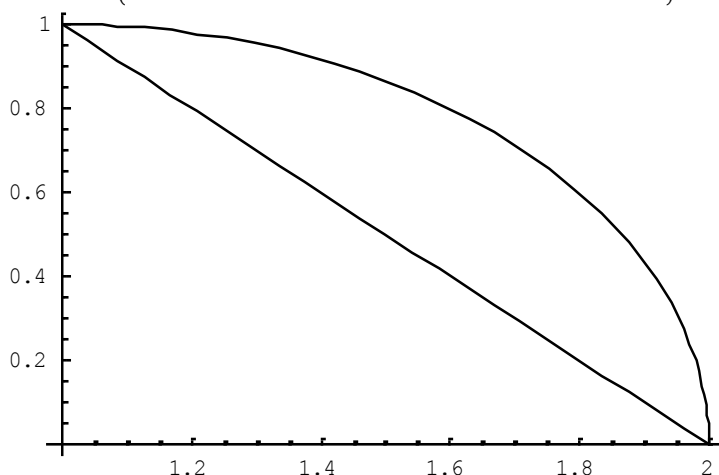
$$\int_0^1 \left(\int_{\frac{y^2}{2}}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^2 f(x, y) dx \right) dy + \int_0^2 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^2 f(x, y) dx$$

Пример. Смени го редоследот на интегрирање во повторениот интеграл:

$$\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$$

Решение: Областа на интегрирање:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, 2-x \leq y \leq \sqrt{2x-x^2} \right\}$$



ќе ја запишеме во облик:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, 2-y \leq x \leq 1+\sqrt{1-y^2} \right\}$$

откаде за промената на редоследот на интегрирање добиваме:

$$\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$$

Пример. Пресметај ги следниве интеграли:

(i) $\iint_D \frac{dx dy}{(x+y)^2}, \quad D = \{(x, y) | 3 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2\}.$

(ii) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, каде областа на интегрирање D е ограничена со триаголник $\triangle ABC$ со темиња во $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(1,0)$.

(iii) $\iint_D xy dx dy, \quad D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}.$

Решение: (i) Да забележиме дека подинтегралната функција $f(x, y)$ е непрекината на правоаголникот D , па може да одиме со теоремата за премин од двоен кон повторен интеграл. Добиваме:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{dx dy}{(x+y)^2} &= \int_3^4 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2} = \int_3^4 dx \left(-\frac{1}{x+y} \right) \Big|_1^2 = \\ &= \int_3^4 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = (\ln(x+1) - \ln(x+2)) \Big|_3^4 = \\ &= \ln \left(\frac{x+1}{x+2} \right) \Big|_3^4 = \ln \frac{5}{6} - \ln \frac{4}{5} = \ln \frac{25}{24} \end{aligned}$$

(ii) Подинтегралната функција е $f(x, y) = x^2 + y^2$ непрекината на D , па може да одиме со теоремата за премин од двоен кон повторен интеграл. Добиваме:

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy$$

Пресметката ја оставаме на читателот како лесна вежба.

(iii) Областа на интегрирање ќе ја запишеме во следниов облик:

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}\}$$

откаде за интегралот добиваме:

$$\iint_D xy dx dy = \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} xy dy$$

Деталите околу пресметката на повторениот интеграл ги оставаме како лесна вежба за читателот.

Пример. Пресметај ги интегралите:

(i) $\iint_D \min\{x, y\} dx dy$ (ii) $\iint_D \max\{x, y\} dx dy,$

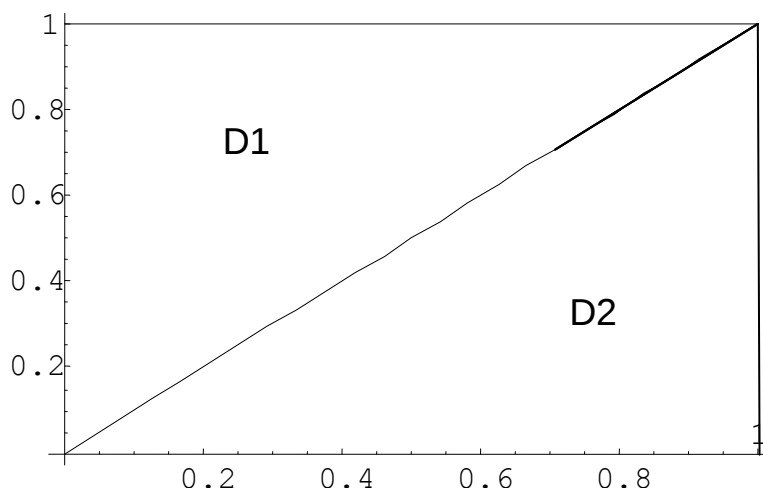
каде областа на интегрирање е единечниот квадрат:

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

Решение: (i) Подинтегралната функција ја запишуваме во облик:

$$f(x, y) = \min\{x, y\} = \begin{cases} x, & x < y \\ y, & x \geq y \end{cases}$$

Областа на интегрирање ќе ја поделиме како на сликата:



каде $D_1 = \{(x, y) \in D \mid x < y\}$, $D_2 = \{(x, y) \in D \mid x \geq y\}$ и важи дека $D = D_1 \cup D_2$. Сега за интегралот добиваме:

$$\iint_D \min\{x, y\} dx dy = \iint_{D_1} \min\{x, y\} dx dy + \iint_{D_2} \min\{x, y\} dx dy$$

Ползувајќи ја дефиницијата на f и теоремата за премин од двоен кон повторен интеграл имаме:

$$\begin{aligned} \iint_D \min\{x, y\} dx dy &= \iint_{D_1} x dx dy + \iint_{D_2} y dx dy = \\ &= \int_0^1 dx \int_x^1 x dy + \int_0^1 dx \int_0^x y dy = \int_0^1 (x - x^2) dx + \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx = \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 + \frac{x^3}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(ii) Слично како под (i) подинтегралната функција ја запишуваме во облик:

$$f(x, y) = \max\{x, y\} = \begin{cases} y, & x < y \\ x, & x \geq y \end{cases}$$

Поделбата на D останува иста како во претходната дискусија. Значи имаме

$D_1 = \{(x, y) \in D \mid x < y\}$ односно $D_2 = \{(x, y) \in D \mid x \geq y\}$ и важи:

$$D = D_1 \cup D_2, \quad D_1 \cap D_2 = \emptyset.$$

Сега за интегралот добиваме:

$$\begin{aligned}
\iint_D \max\{x, y\} dx dy &= \iint_{D_1} \max\{x, y\} dx dy + \iint_{D_2} \max\{x, y\} dx dy = \\
&= \iint_{D_1} y dx dy + \iint_{D_2} x dx dy = \int_0^1 dx \int_x^1 y dy + \int_0^1 dx \int_0^x x dy = \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1-x^2}{2} \right) dx + \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 \left(\frac{1+x^2}{2} \right) dx = \left(\frac{1}{2} x + \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

каде повторно ја ползувавме теоремата за премин од двоен кон повторен интеграл.