

ПРЕДАВАЊЕ 11

(Летен семестар 20/21: 30.03.2021)

„Локални екстреми“

Поимот за локален екстрем на реална функција од повеќе променливи ќе го дефинираме аналогно на случајот со една променлива:

Дефиниција: Нека функцијата $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ е дефинирана во некоја околина $U(a)$ на точката $a \in A \subseteq \mathbb{R}^m$. Ако за секое $x \in U(a)$ важи дека:

$$f(x) \leq f(a), \text{ (односно } f(x) < f(a), \text{ за } x \neq a)$$

за функцијата f велиме дека има локален максимум односно строг локален максимум во точката a еднаков на $f(a)$. Слично се дефинира и (строг) локален минимум. (Строгиот) локален минимум и максимум ги нарекуваме со едно име (строги) локални екстреми.

Како и за функциите од една променлива постои едноставен потребен услов за постоење на локални екстреми:

Пропозиција. Нека функцијата $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ во точката $a \in A \subseteq \mathbb{R}^m$ ги поседува сите парцијални изводи од прв ред и нека во таа точка функцијата има локален екстрем. Тогаш важат следниве релации:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0$$

Специјално, ако функцијата f е диференцијабилна во точката a тогаш $Df(a) = 0$.

Доказ: Ќе ја разгледаме топката $T(a, r)$ во која е дефинирана функцијата f и во која важи дека $f(x) \leq f(a)$ односно $f(x) \geq f(a)$ за секое x од топката. Сега за произволно $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ја разгледуваме функцијата $g : (a_i - r, a_i + r) \rightarrow \mathbb{R}$ дефинирана со релацијата:

$$g(x_i) = f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_m), \text{ за секое } x_i \in (a_i - r, a_i + r)$$

Тогаш функцијата g има локален екстрем во точката a_i па важи $g'(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Доказот е комплетиран.

Забелешка. Точките во кои сите парцијалните изводи од прв ред на дадена функција f се нули ги нарекуваме стационарни точки.

Во продолжение ќе ги испитае доволните услови под кои дадена функција f од повеќе променливи во стационарните точки навистина има локални екстреми. За формулација на овие услови ќе ни требаат некои поими од Линеарна Алгебра што ги наведуваме во продолжение:

Дефинитни квадратни форми

Реална функција од m променливи во облик:

$$\Phi(h_1, h_2, \dots, h_m) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} h_i h_j = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} h_i h_j$$

велиме дека е квадратна форма од променливите $h_1, h_2, \dots, h_m$. Придружената матрица $A(\Phi) = [a_{ij}]_{i,j=1}^m$ велиме дека е матрица на квадратната форма Φ . За оваа матрица секогаш може да претпоставиме дека е симетрична, т.е. дека важи $a_{ij} = a_{ji}$, за секое i, j . За формата Φ велиме дека е позитивно (негативно) полудефинитна ако за секое $h = (h_1, h_2, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m$ важи дека:

$$\Phi(h_1, h_2, \dots, h_m) \geq 0 \quad (\text{односно } \Phi(h_1, h_2, \dots, h_m) \leq 0)$$

За формата Φ велиме дека е позитивно (негативно) дефинитна ако за секое $h = (h_1, h_2, \dots, h_m) \neq \underline{0}$ важи дека:

$$\Phi(h_1, h_2, \dots, h_m) > 0 \quad (\text{односно } \Phi(h_1, h_2, \dots, h_m) < 0)$$

Последно за формата Φ велиме дека е со променлив знак ако постојат $h = (h_1, h_2, \dots, h_m)$ и $k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{R}^m$ такви што:

$$\Phi(h_1, h_2, \dots, h_m) > 0, \quad \Phi(k_1, k_2, \dots, k_m) < 0$$

Пример. Ќе ја разгледаме следнава квадратна форма:

$$\begin{aligned}\Phi_1(h_1, h_2, h_3) &= 2h_1^2 + 5h_2^2 + 2h_3^2 - 2h_1h_2 + 2h_1h_3 + 2h_2h_3 = \\ &= (h_1 + h_2 + h_3)^2 + (h_1 - 2h_2)^2 + h_3^2\end{aligned}$$

Забележи дека Φ_1 е позитивно дефинитна квадратна форма затоа што $\Phi_1(h_1, h_2, h_3) > 0$, за $h = (h_1, h_2, h_3) \neq 0$. Од друга страна формата:

$$\Phi_2(h_1, h_2, h_3) = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + 2h_1h_2 - 2h_1h_3 - 2h_2h_3 = (h_1 + h_2 - h_3)^2$$

е позитивно полудефинитна, но не и дефинитна затоа што може да важи релацијата $\Phi_2(h_1, h_2, h_3) = 0$ и кога не сите h_1, h_2, h_3 се еднакви на нула.

Доволни услови за локален екстрем

Ќе го докажеме најпрво следново помошно тврдење:

Лема. Нека $A \subseteq \mathbb{R}^m$ е отворено множество и нека $a_{ij} : A \rightarrow \mathbb{R}$ се непрекинати функции за секои $i, j = 1, \dots, m$ такви што $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, за сите $x \in A$. Понатаму, за произволно $x \in A$, нека Φ_x е квадратната форма определена со матрицата $[a_{ij}(x)]_{i,j=1}^m$. Ако за некое $a \in A$ квадратната форма Φ_a е позитивно дефинитна тогаш постои $r > 0$ таков што за секој $x \in T(a, r)$ квадратната форма Φ_x е позитивно дефинитна.

Доказ: Ќе ги разгледаме реалните функции $A_1, A_2, \dots, A_m$ определени со:

$$A_1(x) = a_{11}(x), \quad A_2(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad A_m(x) = \det[a_{ij}(x)]$$

Забележи дека функциите се непрекинати за секое $x \in A$. Според **критериумот на Силвестер** од позитивната дефинитност на формата Φ_a следува дека броевите:

$$A_1(a), \quad A_2(a), \quad \dots, \quad A_m(a)$$

се позитивни. Сега од непрекинатоста на функциите A_i , постои позитивен реален број $r > 0$ таков што броевите:

$$A_1(x), A_2(x), \dots, A_m(x)$$

се исто така позитивни за секој $x \in T(a, r)$. Ова значи дека квадратната форма Φ_x е позитивно дефинитна.

Забелешка. Критериумот на Силвестер може да го најдете во било кој пристоеен учебник по Линеарна Алгебра.

Теорема. Нека $A \subseteq \mathbb{R}^m$ е отворено множество, $a \in A$ и $f \in C^2(A)$, каде $a \in A$ е стационарна точка за функцијата f . Понатаму, нека Φ е квадратна форма определена со матрицата:

$$A(\Phi) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right]_{i,j=1}^m$$

Тогаш:

- 1) Ако квадратната форма Φ е позитивно дефинитна тогаш функцијата f има строг локален минимум во точката a .
- 2) Ако квадратната форма Φ е негативно дефинитна тогаш функцијата f има строг локален максимум во точката a .
- 3) Ако квадратната форма Φ е со променлив знак тогаш функцијата f во точката a нема локални екстрими.

Доказ: 1) Ако се исполнети дадените претпоставки според претходната лема постои реален број $r > 0$ таков што за сите $x \in T(a, r)$ е позитивно дефинитна квадратната

форма определена со матрицата $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right]_{i,j=1}^m$. За произволно такво x забележи дека

сегментот $[a, x]$ лежи во $T(a, r)$, па на разликата $f(x) - f(a)$ може да ја примениме теоремата на Тејлор со остаток во Лагранжов облик за $n=1$. Имајќи ја во предвид стационарноста на точката a добиваме:

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \frac{1}{2} \left((x_1 - a_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_m - a_m) \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^2 f(a + \theta(x - a)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m (x_i - a_i)(x_j - a_j) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + \theta(x - a)), \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned}$$

Поинаку кажано, горната разлика е квадратна форма од променливите $x_1 - a_1, \dots, x_m - a_m$ со симетрична матрица:

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (a + \theta(x - a)) \right]_{i,j=1}^m$$

Сега од тоа што векторот $a + \theta(x - a)$ припаѓа на топката $T(a, r)$ следува дека и соодветната квадратна форма е позитивно дефинитна, што значи дека $f(x) - f(a) > 0$, за секое $x \in T(a, r) \setminus \{a\}$. Оттука заклучуваме дека во точката a функцијата f го достигнува својот строг локален минимум.

2) Доволно е да го примениме доказот на тврдењето под 1) за функцијата $-f$.

3) Ако квадратната форма Φ со матрична репрезентација:

$$A(\Phi) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (a) \right]_{i,j=1}^m$$

е со променлив знак тогаш постојат вектори $h = (h_1, h_2, \dots, h_m)$ и $k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{R}^m$ такви што:

$$\Phi(h_1, h_2, \dots, h_m) > 0, \quad \Phi(k_1, k_2, \dots, k_m) < 0 \quad (*)$$

За произволно $\tau > 0$ ќе ги разгледаме точките:

$$x = a + \tau \frac{h}{\|h\|} \quad \text{и} \quad y = a + \tau \frac{k}{\|k\|}$$

Забележи дека за овие точки е исполнето: $\|x - a\| = \|y - a\| = \tau$. Одиме во продолжение со развојот според Тејлор за функцијата f во точката a и остаток во облик на Пеано:

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m (x_i - a_i)(x_j - a_j) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (a) + o(\|x - a\|^2) \\ &= \frac{\tau^2}{2\|h\|^2} \left[\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (a) h_i h_j + o(1) \right] \\ &= \frac{\tau^2}{2\|h\|^2} [\Phi(h_1, h_2, \dots, h_m) + o(1)] \quad (\tau \rightarrow 0) \end{aligned}$$

Слично,

$$f(y) - f(a) = \frac{\tau^2}{2\|k\|^2} [\Phi(k_1, k_2, \dots, k_m) + o(1)] \quad (\tau \rightarrow 0)$$

Сега од тоа што вредностите $\Phi(h_1, h_2, \dots, h_m)$ и $\Phi(k_1, k_2, \dots, k_m)$ не зависат од τ , имајќи ги во предвид релациите (*), за доволно мало τ заклучуваме дека:

$$f(x) - f(a) > 0, \quad f(y) - f(a) < 0$$

Ова значи дека функцијата f нема локални екстреми во точката a .

Последица: Нека A е отворено подмножество од $\mathbb{R}^2$, $(a, b) \in A$, $f(x, y)$ е двапати непрекинато диференцијабилна функција на A и нека $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$.

Понатаму, нека $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) = r$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = s$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) = t$. Тогаш:

- 1) Ако $r > 0$, $rt - s^2 > 0$ функцијата f во точката (a, b) има строг локален минимум.
- 2) Ако $r < 0$, $rt - s^2 > 0$ функцијата f во точката (a, b) има строг локален максимум.
- 3) Ако $rt - s^2 < 0$ функцијата f во точката (a, b) нема локални екстреми.

Пример. Испитај ги локалните екстреми на функцијата:

$$u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$$

Решение: Ги определуваме стационарните точки од системот:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 12y = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 12x = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z + 2 = 0$$

Добиваме две решенија: $M_1(0, 0, -1)$, $M_2(24, -144, -1)$.

Одиме со проверка на доволните услови за постоење на локални екстреми според Теоремата. Ги пресметуваме парцијалните изводи од втор ред:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 12, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2$$

а потоа ги составуваме соодветните детерминанти:

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$

Ги пресметуваме во стационарните точки пооделно:

$$\Delta_1(M_2) = 144 > 0, \quad \Delta_2(M_2) = 144 > 0, \quad \Delta_3(M_2) = 283 > 0$$

па во точката $M_2(24, -144, -1)$ функцијата достигнува минимум.

Слично, за M_1 имаме:

$$\Delta_1(M_1) = 0, \quad \Delta_2(M_1) = -144 < 0, \quad \Delta_3(M_1) = -288 < 0$$

па според теоремата, M_1 е седлеста точка. Ова ќе го потврдиме и на следниов начин:

Го определуваме прирастот во точката M_1 :

$$\Delta u(0, 0, -1) = \Delta x^3 + \Delta y^2 + \Delta z^2 + 12\Delta x \Delta y$$

Сега правиме избор:

$$\Delta x = t^2, \quad \Delta y = \Delta z = 0 \quad \text{односно} \quad \Delta x = -t^2, \quad \Delta y = \Delta z = 0$$

откаде добиваме:

$$\Delta u = t^6 \quad \text{односно} \quad \Delta u = -t^6,$$

па прирастот го менува знакот. Следува заклучокот.