

ПРЕДАВАЊЕ 7

(Летен семестар 20/21: 16.03.2021)

„Теорема за средна вредност“

При изведувањето на доказот на теоремата за средна вредност кај функции од повеќе променливи ќе разгледаме два случаи- скаларен и векторски. Скаларниот е природно обопштување на теоремата на Лагранж кај функции од една променлива. Одиме со првиот случај:

Теорема. Нека $A \subseteq \mathbb{R}^m$ е отворено множество, $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in A$ и векторот $h = (h_1, h_2, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m$ е таков што сегментот:

$$[a, a+h] = \{x \mid x = a+th, 0 \leq t \leq 1\}$$

лежи во A . Понатаму, нека $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекината функција на сегментот $[a, a+h]$ и диференцијабилна на интервалот:

$$(a, a+h) = \{x \mid x = a+th, 0 < t < 1\}$$

Тогаш постои точка $c = a + \theta h$, $0 < \theta < 1$ таква што:

$$f(a+h) - f(a) = Df(c)h = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1 + \theta h_1, a_2 + \theta h_2, \dots, a_m + \theta h_m) h_i$$

Доказ: Ќе ја разгледаме реалната функција $\varphi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ определена со: $\varphi(t) = f(a+th)$, за $0 \leq t \leq 1$. Последниов запис може да го гледаме и како сложена функција $\varphi = f \circ \psi$, каде $\psi: [0,1] \rightarrow [a, a+h]$ е линеарна функција определена со: $\psi(t) = a+th$. Забележи дека функцијата $\varphi = f \circ \psi$ е непрекината на сегментот $[0,1]$ како композиција од непрекинати функции и диференцијабилна на интервалот $(0,1)$ како композиција од диференцијабилни функции. Нејзиниот извод според теоремата за диференцирање на сложена функција е определен со:

$$D\varphi(t) = Df(a+th)D\psi(t) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th) h_i$$

Уште да забележиме дека $\varphi(0) = f(a)$ и $\varphi(1) = f(a+h)$. Сега одиме со теоремата на Лагранж за функции од една променлива применета на функцијата φ . Добиваме дека постои $0 < \theta < 1$, односно вектор $c = a + \theta h \in (a, a+h)$ таков што:

$$f(a+h) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta h) h_i = Df(c)h$$

Доказот е комплетиран.

Забелешка. Да забележиме дека теоремата за средна вредност во овој облик не може да се пренесе во векторски случај. За да дојдеме до соодветниот исказ во векторски случај ќе направиме „реформулација“ на Лагранжовата теорема за функции од една променлива. Имено од:

$$f(a+h) - f(a) = f'(c)h, \quad a < c < a+h$$

следува дека:

$$|f(a+h) - f(a)| = |f'(c)||h| \leq |h| \sup_{c \in (a, a+h)} |f'(c)| = |h| \sup_{0 < t < 1} |f'(a+th)|$$

Специјално, ако функцијата f е непрекинато диференцијабилна на $[a, a+h]$ тогаш имаме:

$$|f(a+h) - f(a)| = |f'(c)||h| \leq |h| \sup_{c \in [a, a+h]} |f'(c)| = |h| \sup_{0 \leq t \leq 1} |f'(a+th)|$$

Во случај на векторска функција апсолутната вредност ќе ја замениме со соодветна норма, додека изводот со соодветната Јакобиева матрица, па доаѓаме до следнава формулација:

Теорема. Нека $A \subseteq \mathbb{R}^m$ е отворено множество и $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ е непрекинато диференцијабилна функција. Понатаму, нека $a, h \in \mathbb{R}^m$ се такви што $[a, a+h] \subseteq A$. Тогаш важи:

$$\|f(a+h) - f(a)\| \leq \|h\| \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Df(a+th)\|$$

Доказ: За произволно и фиксирано $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ ја разгледуваме функцијата:

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^n z_j f_j(a+th), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

каде f_j се координатните функции на функцијата f . Забележи дека φ е непрекината на сегментот $[0,1]$, додека нејзиниот извод е определен со:

$$\varphi'(t) = \sum_{j=1}^n z_j Df_j(a+th)h$$

припаѓа на класата $C[0,1]$. Одиме со неравенството на Коши-Шварц:

$$\begin{aligned} |\varphi(1) - \varphi(0)| &= \left| \int_0^1 \varphi'(t) dt \right| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} |\varphi'(t)| \leq \\ &\leq \|z\| \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Df(a+th)\| \|h\| \end{aligned}$$

Оттука добиваме дека:

$$\left| \sum_{j=1}^n z_j (f_j(a+h) - f_j(a)) \right| \leq \|z\| \|h\| \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Df(a+th)\|$$

Доколку во последното неравенство направиме избор $z = f(a+h) - f(a)$, односно $z_j = f_j(a+h) - f_j(a)$, добиваме:

$$\|f(a+h) - f(a)\|^2 \leq \|f(a+h) - f(a)\| \|h\| \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Df(a+th)\|$$

Сега, доколку $\|f(a+h) - f(a)\| = 0$ тврдењето во теоремата е тривијално. Во спротивно делиме со $\|f(a+h) - f(a)\| \neq 0$ и го добиваме посакуваното неравенство. Доказот е компетиран.

Забелешка. За едно множество $A \subseteq \mathbb{R}^m$ велиме дека е област ако е отворено и сврзано множество.

Последица. Нека $A \subseteq \mathbb{R}^m$ е област и нека $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ е диференцијабилна функција. Ако за секој $x \in A$ Јакобиевата матрица на f во точката x е нулта, т.е. $Df(x) = 0$ тогаш функцијата е константа.

Доказ: Ќе го разгледаме прво случајот кога A е конвексно множество. Одбираме произволни точки $a, a+h \in A$ и на сегментот $[a, a+h] \subseteq A$ одиме со претходната

теорема. Добиваме дека $\|f(a+h) - f(a)\| = 0$, односно $f(a+h) = f(a)$, па заклучуваме дека функцијата е константна на множеството A .

Сега претпоставуваме дека A е произволно отворено и сврзано множество. За секоја точка $a \in A$ постои топка $T(a, r)$ со центар во a и радиус r што се содржи во A . Забележи дека секоја топка е конвексно множество, па од претходната дискусија заклучуваме дека функцијата f е константа на секоја од овие топки.

Нека $B = f(A) \subseteq \mathbb{R}^n$. Одбираме произволен вектор $b \in B$. Од затвореноста на $\{b\}$ и непрекинатоста на f добиваме дека $f^{-1}(\{b\})$ е затворено множество. Од друга страна за произволна точка $a \in f^{-1}(\{b\})$ постои топка $T(a, r)$ со центар во a во која функцијата е константа, имено b . Ова значи дека $f^{-1}(\{b\})$ е отворено множество. Од сврзаноста на множеството A добиваме дека $f^{-1}(\{b\}) = \emptyset$ или $f^{-1}(\{b\}) = A$. Но $a \in f^{-1}(\{b\})$, па $f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset$. Заклучокот следува.