

ПРЕДАВАЊЕ 10

(Летен семестар 21/22: 11.05.2022)

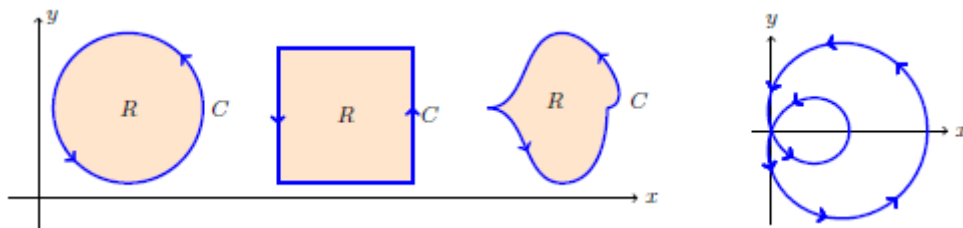
„Теорема на Грин“

Гриновата теорема е една од најважните теореми во интегралното сметање на функции од повеќе променливи. Теоремата воспоставува врска меѓу криволиниските и двојните интеграли. Ползувајќи ја оваа релација честопати може да пресметаме навидум тежок интеграл без интегрирање или да го сведеме на интеграл што лесно се пресметува. Ќе воспоставиме и аналогија со фундаменталната теорема на интегралното сметање.

Прости затворени криви.

Дефиниција. *Проста затворена крива* е затворена крива што не се само-пресекува.

Секоја проста затворена крива C има добро-дефинирана внатрешност. Ќе ја означиме внатрешноста со R . За кривата C велиме дека е позитивно ориентирана ако R е постојано од левата страна како што се движиме вдоль кривата. За C велиме дека е раб на R .



Три позитивно ориентирани прости затворени криви

затворена но не-проста

Забелешка. За произволна проста затворена крива доказот дека постои добро-дефиниран интериор е прилично суптилен. Теоремата што го докажува ова тврдење е позната како **теорема за Жорданова крива**.

Подготвени сме да ја формулираме теоремата на Грин во $\mathbb{R}^2$ (дво-димензионална рамнинска верзија)

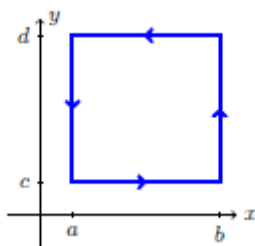
Теорема на Грин. Нека C е позитивно ориентирана проста затворена крива со внатрешна област R . Претпоставуваме дека C е по делови глатка-крива (дозволени се конечно многу кошиња). Ако векторското поле $F = (M, N)$ е дефинирано и диференцијабилно на R тогаш важи:

$$\oint_C Mdx + Ndy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy \quad (1)$$

Во дво-димензионалниот случај дефинираваме циркулација на векторско поле $F = (M, N)$ со релацијата $\text{curl} F = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$. Значи во векторска форма теоремата на Грин го добива обликот:

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_R \text{curl} F dxdy$$

Доказ: Прво ќе работиме на правоаголникот прикажан на сликата подолу. Подоцна ќе обопштиме на произволна област.



Слика 2

Ќе направиме уште едно поедноставување. Имено, нека $N = 0$. Доказот за случајот кога $N \neq 0$ е аналоген (но со повеќе пишување).

Прво ќе ја разгледаме десната страна од теоремата на Грин (равенството 1). Со директна пресметка, сметајќи дека $N = 0$, за десната страна добиваме дека:

$$\iint_R -\frac{\partial M}{\partial y} dxdy = \int_a^b \int_c^d -\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) dydx$$

Забележи дека внатрешниот интеграл е интеграл во однос на y на извод во однос на y . Значи може да го пресметаме ползувајќи ја фундаменталната теорема на интегралното сметање:

$$\int_c^d -\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) dy = -M(x, y)|_c^d = M(x, c) - M(x, d)$$

Сега заменуваме во горната релација, па добиваме дека:

$$\iint_R -\frac{\partial M}{\partial y} dx dy = \int_a^b M(x, c) - M(x, d) dx \quad (2)$$

Следно ја разгледуваме левата страна од равенството 1. Сметајќи дека $N=0$ треба да го пресметаме интегралот $\oint_C M dx$. Забележи дека C има четири страни (т.е. четири кошиња), па ќе ја параметризираме секоја од нив:

Долната страна $x=x, y=c, x$ се менува од a до $b, dx=dx$

Горната страна $x=x, y=d, x$ се менува од b до $a, dx=-dx$

Левата и десната страна отпаѓаат бидејќи $dy=0$.

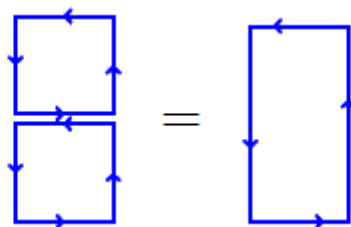
Значи имаме дека:

$$\begin{aligned} \oint_C M dx &= \int_{\text{долна страна}} M dx + \int_{\text{горна страна}} M dx = \\ &= \int_a^b M(x, c) dx + \int_b^a M(x, d) dx = \int_a^b M(x, c) - M(x, d) dx \end{aligned} \quad (3)$$

Ако ги споредиме равенствата (2) и (3) може да заклучиме дека сме ја докажале Гриновата теорема за правоаголник.

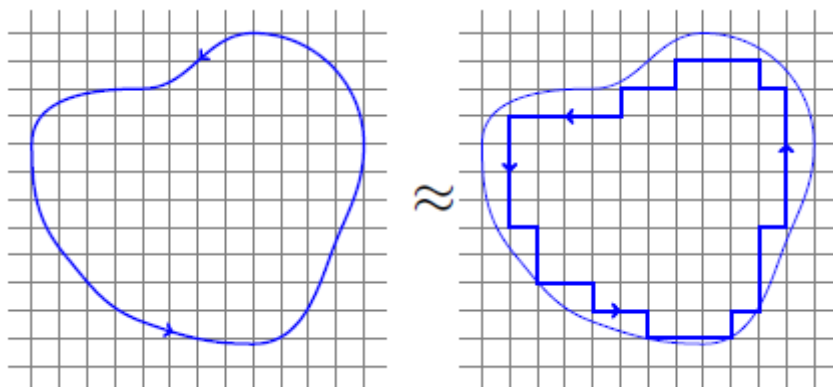
Во продолжение ќе ја докажеме за произволна област. Ќе започнеме со лепење на два правоаголника еден врз друг.

Забележи дека за криволиниски интеграли при додавања на два правоаголника со заедничка страна, заедничките страни се ориентирани во спротивни насоки. Ова значи дека сумата од криволиниските интеграли над двата правоаголника е еднаква со криволинискиот интеграл над надворешните рабови. (види слика 3)



Слика 3

Слично, при додавање на произволно многу правоаголници: се се анулира освен надворешните рабови. Ова ја обопштува теоремата на Грин од правоаголник на унија од правоаголници. Сега од тоа што произволна област може да ја апроксимираме како унија од правоаголници (произволно блиску) теоремата на Грин мора да важи и на произволни области. (види ја сликата подолу)



Слика 4

Во продолжение ќе направиме аналогија со фундаменталната теорема од интегралното сметање. Ќе ја запишеме фундаменталната теорема во облик:

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

Ова е сликата на доменот на интеграција:



Забележи дека левата страна во фундаменталната теорема ги вклучува интегралот на изводот на F над дадена област (интервал), додека десната страна е сума од самото F над работ (крајните точки) на областа.

Слично во Гриновата теорема:

$$\iint_R \text{curl} F dx dy = \oint_C F \cdot dr$$

левата страна вклучува интеграл од извод на F (т.е. $\text{curl} F = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$) над дадена област, додека десната страна е интеграл (т.е.сума) од самото F над работ на областа. Забележи дека ова е истиот јазик што го ползувавме при описот на фундаменталната теорема погоре.

Забелешка. Забележи дека плоштината на делот од рамнината D ограничен со проста затворена крива γ е определена со релацијата:

$$P(D) = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} xdy - ydx \quad (*)$$

Имено, ако одиме со теоремата на Грин при избор $M(x, y) = -y$ и $N(x, y) = x$ нашиот интеграл го добива обликот:

$$\oint_{\gamma} xdy - ydx = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y) \right) dx dy = 2 \iint_D dx dy = 2P(D)$$

Релацијата (*) следува.