

ПРЕДАВАЊЕ 8

(Летен семестар 20/21: 17.03.2021)

„Извод во правец. Градиент“

Нека $A \subseteq \mathbb{R}^n$ е отворено множество и нека $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ е дадена функција. Парцијалниот извод $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ во точка $a \in A$, доколку постои, ја одредува брзината на промена на функцијата f вдоль права паралелна на i -тата координатна оска. Во она што следува ќе воведеме поим што ќе ја одредува брзината на промена на функцијата f во произволен правец.

Нека $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ е произволен единечен вектор. Забележи дека за доволно мало $t \in \mathbb{R}$, векторот $a + tu$ останува во множеството A (имај ја во предвид отвореноста на ова множество). Ова значи дека $f(a + tu)$ е дефинирано.

Дефиниција. Конечната гранична вредност (доколку постои)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}$$

велиме дека е извод на функцијата f во точката a во правец на векторот u . Го означуваме со $D_u f(a) = \frac{\partial f}{\partial u}(a)$ или $f'_u(a)$.

Пример. Нека $u = e_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ е i -от единечен координатен вектор. Забележи дека $D_u f(a) = \frac{\partial f}{\partial u}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Ова значи дека изводот во правец на векторот e_i се совпаѓа со парцијалниот извод на функцијата f во точката a по i -тата променлива.

Да забележиме дека постоењето на парцијалните изводи на функцијата f во дадената точка a по сите променливи не е доволен услов за постоењето на нејзиниот извод во произволен правец. Следново тврдење дава доволен услов за тоа:

Пропозиција. Нека $A \subseteq \mathbb{R}^n$ е отворено подмножество и нека $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ е дадена реална функција. Понатаму, нека $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ е произволен единечен вектор. Ако функцијата f е диференцијабилна во точка $a \in A$ тогаш постои извод на

функцијата f во правец на векторот $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ во точката a и важи следнава релација:

$$D_u f(a) = \nabla f(a) \cdot u$$

Доказ: Забележи дека од диференцијабилноста на функцијата f во точката a може да заклучиме дека постојат парцијалните изводи во таа точка. Нека $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = L_i$, за секое $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Тогаш прирастот на функцијата f генериран од прирастот $h = tu$ на независната променлива може да се запише во следниов облик:

$$\begin{aligned} f(a + tu) - f(a) &= Df(a)h + o(h) \quad (h \rightarrow 0) \\ &= t \sum_{i=1}^n L_i u_i + o(t) \quad (t \rightarrow 0) \end{aligned}$$

каде $o(h)$ односно $o(t)$ се функции такви што $\frac{o(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$, односно $\frac{o(t)}{|t|} \rightarrow 0$ кога $h \rightarrow 0$ односно $t \rightarrow 0$.

Оттука добиваме дека:

$$\frac{f(a + tu) - f(a)}{t} = \sum_{i=1}^n L_i u_i + \frac{o(t)}{t} \rightarrow \sum_{i=1}^n L_i u_i \quad (t \rightarrow 0)$$

Забележи уште дека $\nabla f(a) = (L_1, L_2, \dots, L_n)$, додека $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$. Конечно имаме дека $D_u f(a) = \nabla f(a) \cdot u$, што е посакуваната релација.

Забелешка. Ползувајќи го неравенството на Коши-Шварц во горната пропозиција го добиваме следново неравенство:

$$\|D_u f(a)\| \leq \|\nabla f(a)\| \cdot \|u\| = \|\nabla f(a)\|$$

од каде ја добиваме следнава последица:

Последица: Најголемата вредност на изводот во правец за функцијата f во точката $a \in A$

- (1) се достигнува во правец на векторот $\nabla f(a)$
- (2) нејзината вредност е $\|\nabla f(a)\|$.

Следниов пример е убава илустрација за посочената последица:

Пример. Нека е дадена функција $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ определена со:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

и нека $a = (1, 2, 3)$.

(1) Пресметај го изводот во правец за функцијата f во точката a во правец на векторот $v = (2, -1, 1)$.

(2) Пресметај го правецот и брзината на најголем раст во точката a .

Решение: (1) Го пресметуваме градиентот $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$. Посебно, во точката $a = (1, 2, 3)$ добиваме $\nabla f(a) = (2, 4, 6)$. Понатаму, го пресметуваме единечниот вектор во правец на векторот $v = (2, -1, 1)$. Добиваме:

$$u = \frac{1}{\|v\|} v = \frac{1}{\sqrt{6}} (2, -1, 1)$$

па оттука за изводот во правец имаме:

$$D_u f(a) = \nabla f(a) \cdot u = (2, 4, 6) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} (2, -1, 1) = \frac{1}{\sqrt{6}} (4 - 4 + 6) = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

(2) Правецот на најголем раст е правецот на градиентот $\nabla f(a) = (2, 4, 6)$, односно на придружениот единечен вектор:

$$u = \frac{(2, 4, 6)}{\sqrt{4 + 16 + 36}} = \frac{(2, 4, 6)}{\sqrt{56}} = \frac{(1, 2, 3)}{\sqrt{14}}$$

Брзината на најголем раст е $\|\nabla f(a)\| = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$.